



## 28. 線形シグマ模型をもちいた有限温度／密度における 秩序パラメーターの時間発展と粒子生成

佐藤健一, 小出知威, 丸山政弘  
東北大学 理学部 原子核理論研究室

### 要旨

There are various approaches to nonequilibrium system. We use the projection operator method investigated by F. Shibata and N. Hashitsume on the linear sigma model at finite temperature and density. We derive a differential equation of the time evolution for the order parameter and pion number density in chiral phase transition.

### 1 はじめに

ハドロンはクォークとグルーオンによって構成されていると考えられ、その力学は QCD (Quantum Chromodynamics) で記述される。QCD はカラーの閉じ込め、カイラル対称性の破れといった非摂動的性質を持っている。高温、高密度状態においてはハドロン内に閉じ込められていたクォークとグルーオンが開放され、破れたカイラル対称性が回復すると期待されている。米国のブルックヘブン国立研究所では、RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) と呼ばれる加速器をもちいて高エネルギーの重イオン衝突から高温、高密度状態を生成し、このことを実験的に検証することが計画されている。

対称性が基底状態においてどの程度破れているかは、その対称性に対する秩序パラメーターから調べられる。QCD の有効理論である線形シグマ模型 [1] はカイラル対称性を持ち、カイラル相転移の秩序パラメーターは、シグマ場の真空期待値で与えられる。

我々は、射影演算子の方法 [2],[3] をもちいて有限温度／密度下における基底状態近傍での秩序パラメーターの時間発展方程式とそれに伴って変化するパイ中間子数密度の時間発展方程式を導いた。この方法では場の理論の枠組みで量子補正を考慮した時間発展方程式が求められ、減衰項も自然なかたちで導かれる。

我々がもちいた方法は正準形式のものであるが、他に経路積分法によるアプローチとして [4] などがある。

### 2 ハミルトニアン密度と時間発展方程式

線形シグマ模型のハミルトニアン密度を、次のように与える。ただし、シグマ場のゼロモードに定数のシフトを入れてある ( $\sigma_0 \rightarrow v + \sigma_0$ )。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \psi^\dagger [-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + g_0 v \beta] \psi + g_0 \bar{\psi} (\sigma + i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \psi \\ & + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)^2 + M_\sigma^2 \sigma^2] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + M_\pi^2 \vec{\pi}^2] + \frac{\lambda_0 v}{3!} [\sigma^3 + \sigma \vec{\pi}^2] + \frac{\lambda_0}{4!} [\sigma^2 + \vec{\pi}^2]^2 \\ & + (M^2 + \frac{\lambda}{6} v^2 - h + (m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} v^2) - (M^2 + \frac{\lambda}{6} v^2)) \sigma \\ & + \frac{1}{2} [(m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} v^2) - M_\sigma^2] \sigma^2 + \frac{1}{2} [(m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} v^2) - M_\pi^2] \vec{\pi}^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$m_0, \lambda_0, g_0$  はそれぞれ裸の質量、結合定数であり、0 の添字の無いものは繰り込まれた量である。対称性の破れた場合を考えるので、 $m_0$  の繰り込まれた値  $m$  については  $m^2 < 0$  とする。 $v$  は condensate の値であり、真空ではパイオン崩壊定数を与える。式 (1) には質量パラメーター  $M_\sigma = \sqrt{M^2 + \lambda v^2/2}, M_\pi = \sqrt{M^2 + \lambda v^2/6}$  からなる質量項を足して引くかたちで導入してある。

柴田・橋爪の射影演算子の方法 [2],[3] より、任意のハイゼンベルグ演算子  $O(t)$  に対する発展方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}O(t) = & e^{iLt}PiLO(0) + e^{iLt} \int_0^t dsPe^{-iL_0s}iL_Ie^{iL_0s}QiLO(0) \\ & + Qe^{iLQt}iLO(0), \end{aligned} \quad (2)$$

この式 (2) は、相関を最低次で考慮した近似式になっている。

記号  $L$  は Liouville 演算子で、任意の演算子  $A$  に対して  $LA \equiv [H, A]$  のように作用する。 $L_I$  は相互作用ハミルトニアンに対する Liouville 演算子である。初期状態 ( $t = 0$ ) を決定する密度演算子は  $\rho_{tot} = \rho_S \otimes \rho_E$  で与える。 $\rho_E$  は環境の自由ハミルトニアンでボルツマン分布させた状態の密度演算子とし、 $\rho_S$  は注目する自由度の適当なコヒーレント状態の密度演算子とする。 $P$  は射影演算子で  $PA \equiv Tr_E[\rho_E A]$  のように取る。これによって全系は注目する自由度と環境の自由度に分けられ、射影演算子をもちいて環境の自由度が粗視化される。もう一つの射影演算子  $Q$  は  $Q = 1 - P$  とする。我々はこの微分方程式をもちいて初期値問題として系の時間発展を求めようとしており、この自由ハミルトニアンでの期待値も初期時刻において与えられる (時々刻々期待値を取るわけではない)。今回の計算では最後に  $P$  を演算するのでこの最後の項は寄与しない。

### 3 秩序パラメーターの時間発展

全空間一様な場合には、シグマ場の運動量ゼロのモードの期待値が秩序パラメーターとなるので  $\sigma_0(t)$  を注目する自由度とし、その時間発展方程式を求める。ただしこの  $\sigma_0$  は  $v$  のまわりの揺らぎなので秩序パラメーターの値は  $v + \langle \sigma_0(t) \rangle$  である。

注目する自由度 (System) の自由ハミルトニアン密度  $\mathcal{H}_S$  と環境 (Environment) の自由度の自由ハミルトニアン密度  $\mathcal{H}_E$  を次のように与え、残るハミルトニアン密度を相互作用ハミルトニアン密度  $\mathcal{H}_I$  とする。

$$\mathcal{H}_S = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma_0)^2 + M_\sigma^2 \sigma_0^2], \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma_{k \neq 0})^2 + M_\sigma^2 \sigma_{k \neq 0}^2] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + M_\pi^2 \vec{\pi}^2] + \psi^\dagger [-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + gv\beta] \psi, \quad (4)$$

これより式 (2) から、次の時間発展方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \langle \sigma_0(t) \rangle_{\beta, \mu} = & -(v(M^2 + \frac{\lambda}{6}v^2) - h) \\ & -(M_\sigma^2 + Re\Sigma'_R(\beta, \mu; t)) \langle \sigma_0(t) \rangle_{\beta, \mu} - 2\Gamma(\beta, \mu; t) \frac{d}{dt} \langle \sigma_0(t) \rangle_{\beta, \mu} \\ & + Nonlinear\ Terms, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Sigma'_R(\beta, \mu; t) = \Sigma_R(\beta, \mu; t) - \Sigma^{tad}(\beta, \mu), \Gamma(\beta, \mu; t) = \frac{Im\Sigma_R(\beta, \mu; t)}{2M_\sigma}, \quad (6)$$

この方程式は式 (2) を更に近似して **1loop** の寄与 (図 1 の寄与) のみを考慮した場合になっている。

$\langle \dots \rangle_{\beta, \mu} = P \dots = Tr_E[\rho_E \dots], \rho_E = exp[-\beta(H_E - \mu N_E)]$  であり、 $\beta = 1/T$  で  $T$  は温度、 $\mu$  は化学ポテンシャルである。

$\Sigma_R(\beta, \mu; t), \Sigma^{tad}(\beta, \mu)$  はそれぞれ図 1 のダイアグラムに相当する量子補正であり、 $\Gamma(\beta, \mu; t)$  は減衰率である。また、 $\Sigma_R(\beta, \mu; t)$  は遅延関数 (retarded function) であるので、 $R$  の添え字をつけてあり、 $\Sigma^{tad}(\beta, \mu)$  の 'tad' は tadpole ダイアグラムの意味である。

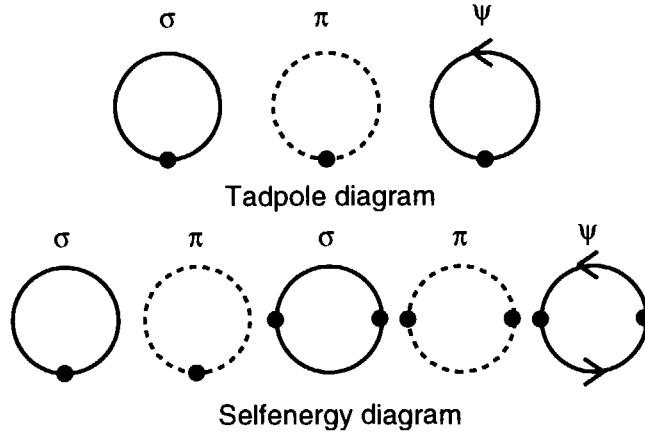


図 1: 量子補正ダイアグラム

今回は平衡点近傍のみを扱う場合を考えることにし、式 (5) を線形近似し質量パラメーターも平衡点で与えることにする。

$M, v$  は次の Gap 方程式の解として定義した。

$$1. \quad \mu^2 + \Sigma^{tad}(\beta, \mu; M, v) = M^2, \quad (7)$$

$$2. \quad v(M^2 + \frac{\lambda}{6}v^2) - h = 0, \quad (8)$$

条件式 (7) は  $\Sigma^{tad}(\beta, \mu; M, v)$  を  $m^2$  への補正として扱い、その補正を考慮したものを  $M^2$  として Gap 方程式を立てている。条件式 (8) は平衡値 ( $t \rightarrow \infty$  での値) において調和振動的に振る舞うという条件である。また条件式 (8) よりカイラル極限においては、 $v \neq 0$  でパイ中間子場の質量パラメーター  $M_\pi$  は 0 になる。

繰り込みについては **1loop** 計算の質量補正については正則化の方法が与えられている [3]。今の場合には線形シグマ模型であるので結合定数の繰り込みも必要になる。繰り込みは真空の平衡点において行った。

図 2 は Fermion がない場合 ( $O(4)$  線形シグマ模型) の、温度  $T = 0, 180[\text{MeV}]$  における秩序パラメーターの時間発展のグラフである。初期条件は  $t = 0$  で  $\langle \sigma_0 \rangle = 0, d\langle \sigma_0 \rangle/dt = 0$  とした。ただし相関関数については時間変数  $t \rightarrow \infty$  の極限值 ( $\Sigma_R(\beta, \mu; t) \rightarrow \Sigma_R(\beta, \mu; \infty), \Gamma(\beta, \mu; t) \rightarrow \Gamma(\beta, \mu; \infty)$ ) をもちいた。

パラメーターについては、真空 ( $T = 0[\text{MeV}]$ ) において  $v = 93[\text{MeV}], M_\sigma = 550[\text{MeV}], M_\pi = 140[\text{MeV}]$  ( $\lambda = 98, \mu^2 = -120 \times 10^3 [\text{MeV}^2]$ )、とした。  $T = 180[\text{MeV}]$  では  $v = 65[\text{MeV}], M_\sigma = 410[\text{MeV}], M_\pi = 170[\text{MeV}]$  となっている。

#### 4 数演算子の時間発展

この枠組みの範囲で先の秩序パラメーターの時間変化に伴う環境 (Environment) の時間変化も調べることができる。環境の 1 次の期待値は今の初期条件では時間変化しないが、2 次以上の演算子の期待値は時間変化が

現れる可能性がある。今回は、パイ中間子場の数演算子密度  $n_\pi(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{\vec{k}} b_i^\dagger(\vec{k}, t) b_i(\vec{k}, t)$  の時間発展を与

える方程式を求めた。ただし演算子  $b_i^\dagger(\vec{k}), b_i(\vec{k})$  は真空でのパイ中間子 (質量:  $140[\text{MeV}]$ ) 1 粒子状態を生成、消滅する演算子とした。一方、秩序パラメーターの時間発展方程式を導く際には有限温度/密度の効果を取り込んだ質量を持つ 1 粒子状態を生成、消滅する演算子  $B_i^\dagger(\vec{k}), B_i(\vec{k})$  で書かれているが、この 2 つの演算子の組は

Bogolioubov 変換によって結ばれる。 ( $N_\pi(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{\vec{k}} B_i^\dagger(\vec{k}, t) B_i(\vec{k}, t)$  についての時間発展方程式を求める

ことも可能で、その場合には条件 (7), (8) で決まる質量を持つパイ中間子の数密度の時間発展が得られる。今回真空でのパイ中間子数密度  $n_\pi(t)$  の時間発展方程式を求めたのは実際に観測されるのは真空でのパイ中間子であること、また温度/密度が異なる場合を比較するには共通の量で比較する必要があったからである。)

$\langle n_\pi(t) \rangle$  の時間微分方程式は  $\langle \sigma_0(t) \rangle_{\beta,\mu}, \langle \Pi_{\sigma_0}(t) \rangle_{\beta,\mu}, \langle \sigma_0(t) \rangle_{\beta,\mu}^2, \langle \sigma_0(t) \rangle_{\beta,\mu} \langle \Pi_{\sigma_0}(t) \rangle_{\beta,\mu}$  という 1 次と 2 次の項で与えられる。よってこの式から得られる数演算子の期待値の変化は相転移に伴う (秩序パラメーターの変化に伴う) 粒子生成と考えられる。

また、この方程式では繰り込みは必要がない。

図 3 は、図 2 の秩序パラメーターの時間発展に対するパイ中間子数密度の時間発展のグラフである。初期条件は  $T = 0[\text{MeV}]$  で  $\langle n_\pi \rangle = 0[1/\text{fm}^3]$  とした。秩序パラメーターの計算とコンシステントにするために、ここでも相関関数については時間変数  $t \rightarrow \infty$  の極限值をもちいた。  $T = 180[\text{MeV}]$  の場合の方が真空の場合に比べてパイ中間子数密度の増加が少ないのは、高温になると  $M_\sigma - 2M_\pi \rightarrow 0_+$  となるためである。

式 (5) を厳密に解く場合には、減衰率  $\Gamma(\beta, \mu; t)$  が次のような時間依存性を持つ。

$$\Gamma(\beta, \mu; t) \sim \int d^3p f(\vec{p}) \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2E_\pi(\vec{p}) - M_\sigma)t}{2E_\pi(\vec{p}) - M_\sigma} \rightarrow \int d^3p f(\vec{p}) \delta(2E_\pi(\vec{p}) - M_\sigma) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (9)$$

したがって初期の有限な時間においてはエネルギー保存則を満たす  $|\vec{p}| = \sqrt{M_\sigma^2 - 4M_\pi^2}/2$  以外のモードも減衰に寄与する。  $n_\pi(t)$  の時間微分方程式から得られる解にはこうしたモードによる影響も現れる。これは  $n_\pi(t)$  の時間微分方程式から得られる解が初期時刻から有限な時間で仮想的に放出されるパイ中間子まで含んでおり、長時間経った後には実際に放出されるパイ中間子だけが記述される [5]。

## 5 まとめ

我々は、柴田・橋爪の射影演算子の方法をもちいて、場の理論の枠組みで有限温度/密度における線形シグマ模型の秩序パラメーターの時間発展を記述する時間発展方程式を導出した。また秩序パラメーターの時間発展に伴って変化するパイ中間子数密度の時間発展方程式も導いた。

今回は線形近似をしているために平衡点から遠い場合は扱えない。そこで非線形項を考慮し、平衡点から遠い場合に場の展開をどのように与えるのが有効かということも含めて検討していく。また、質量パラメーター  $M_\sigma, M_\pi$  を導入して或る条件のもとでこれを決めたと、調和振動的に振る舞うときの振動数 (運動量ゼロモードの場合には質量) は  $\langle \sigma(t) \rangle$  の 1 次項の係数全体から決まるので、そのことを考慮して自己無撞着な取扱いをすることを今後の課題とする。

## 参考文献

- [1] M.Gell-Mann and M.Levy,Nuovo.Cim.Vol 16.Num 4.1729(1960)  
J.Schwinger,Ann.Phys.2.407(1958)  
B.W.Lee,Chiral Dynamics(Gordon and Breach,1972)
- [2] N.Hashitsume ,F.Shibata and M.Shingū, J.Stati.Phys17,155(1977)  
F.Shibata and N.Hashitsume,J.Phys.Soc44,1435(1978)
- [3] T.koide ,M.Maruyama ,F.Takagi, Prog.Theor.Phys.101373(1999)
- [4] C.Greiner and B.Müller, Phys.Rev.D55,1026(1997)
- [5] 高橋 康,「物性研究者のための場の量子論 II」(培風館,1976)

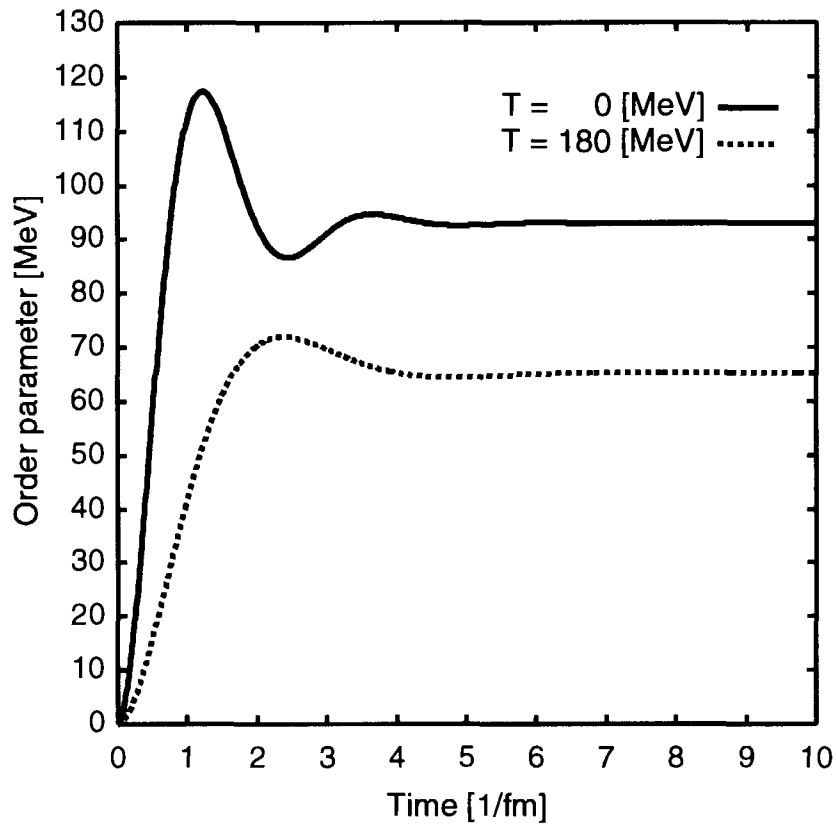


図 2: 秩序パラメーターの時間発展

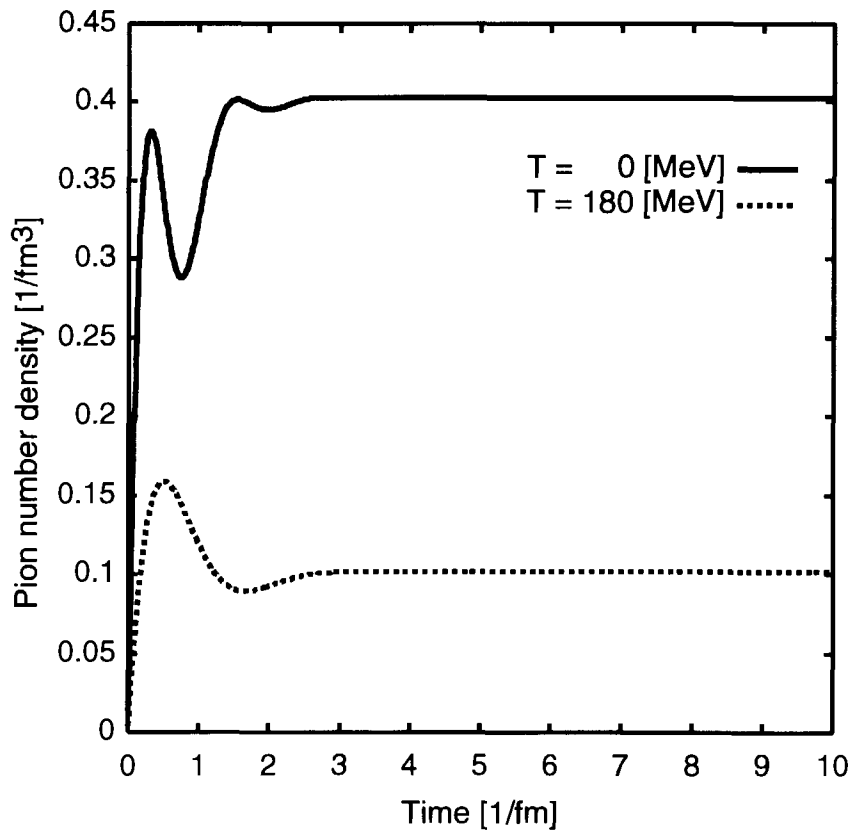


図 3: パイ中間子数密度の時間発展