22. 光円錐量子化法とその応用
– Past, Present and Near Future –

板倉 数記　阪大 RCNP

This talk is a brief overview of the light-front quantization as a new non-perturbative method and its application to hadron physics. Emphasis is put on the recent progress in describing the "vacuum physics" on the light front.

1 Light-Front Quantization

本稿では最近再び注目されている「光円錐量子化法 (Light-Front Quantization)」[1] を紹介し、そのハドロン物理への応用を議論する。QCD では閉じ込めによって全ての状態が束縛状態であるので、相対論的束縛状態を非摂動的に取り扱える光円錐量子化法を応用するのは非常に興味深い。以下ではその手法を導入するに至った動機を過去に遡って説明した後、最近になって発展してきた非摂動的な解析を自分の仕事を交えて概観し、さらに今後取り組むべき問題や応用可能な問題について触れる。さて、まず一番最初に光円錐量子化法の定義を明確にしておこう。光円錐量子化法とは、光円錐座標での x^+ すなわち

$$x^+ = (x^0 + x^3)/\sqrt{2} \tag{1}$$

を「時間」として取り扱い、正準量子化を行なう手法である。なお、その他の「空間」座標 $x^- = (x^0 - x^3)/\sqrt{2}$ と $x_\perp^i = x^1, x^2$ はそれぞれ「縦方向」と「横方向」と呼ばれる。例えば 3+1 次元スカラー場に対してなら $[\phi(x^+, \mathbf{x}),\ \pi(x^+, \mathbf{y})] = \frac{i}{2}\delta(x^- - y^-)\delta^{(2)}(x_\perp - y_\perp)$ なる「同時刻」交換関係を課すことになる。

2 Past [1949 – 1970's]

この手法の特徴を考える際、初めに考え出された時の純粋な動機を知ることは非常に重要である。x^+ を時間として量子化を行なうという突飛なアイディアはそもそも 50 年前に Dirac [2] によって提唱された。その時の彼の動機は「相対論と量子力学の融合」であった。さらに量子力学はハミルトン形式で書かれているので、「相対論とハミルトン形式の融合」と言い換えてもいい。普通の量子化は時間一定（x^0 =constant）の超平面上で指定され、その面は回転や空間の平行移動のもとでは動かない（そのような運動の生成子（ここでは 6 つ）を kinematical と呼ぶ）が、Lorentz 変換は時間を空間と混ぜるので明らかに Lorentz boost のもとでは動いてしまう。それゆえ、普通は静止系で得られた解から慣性系での解を得ることは容易ではない。その意味で相対論と量子論は相性が悪く、その幸福な融合が問題にされたのである。Dirac は相対論的系に最も「便利」なハミルトン形式を見つけるという形で問題設定をし、具体的には 10 個の Poincaré 生成子のうち、kinematical な生成子の数が最大になるような形式を探した。その結果、さらにある方向の boost を含んで全部で 7 つの kinematical な生成子を持つ枠組として "front form" を見つけたのである。実際、z 軸方向の Lorentz boost は光円錐座標に対しては（$\tanh\phi = \beta$）

$$x'^+ = e^{\phi}x^+, \quad x'^- = e^{-\phi}x^- \tag{2}$$

となり、$x^+ = 0$ なる超平面は不変である。この性質は非常に大きな意味を持っている。すなわち、光円錐量子化で時刻 $x^+ = 0$ において束縛状態を解き運動量 P の状態 $|P\rangle$ を得た時、その boost された状態 $|P'\rangle$ が $|P\rangle$ を使って容易に求めることができることを意味している。これは光円錐量子化法の特筆すべき利点である。特に複合粒子系であるハドロンにとっては非常に好ましい性質と言える。

もう一つの重要な側面としてパートン模型との関係について触れておこう。QCD およびパートン模型の発展の上で光円錐的な視点は様々な側面で現れてきた。まず、電子-核子の深非弾性散乱においては "Light-Cone Dominance" と呼ばれる状況があるが、それは hadronic tensor

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\int d^4x\, e^{-iqx}\langle PS|[J^\mu(x), J^\nu(0)]|PS\rangle$$

の被積分関数が Bjorken 極限（$Q^2 = -q^2 \to \infty,\ x_{\mathrm{bj}} = Q^2/2p\cdot q$: fixed）では $x^+ \sim 0, x_\perp \sim 0$ 付近が最も効くことをいう。また、そもそも Light-Cone gauge $A_- = 0$ で（$n^\mu = (1,0,0,-1)/2P$）

$$q(x_{\mathrm{bj}}) = \int \frac{d\lambda}{2\pi}\, e^{i\lambda x_{\mathrm{bj}}}\langle PS|\bar\psi(0)\not{n}\psi(\lambda n)|PS\rangle$$

という量が「quark 数密度」として見なせるのは、いわゆる Infinite Momentum Frame(IMF) をとった時だけであることも注目して欲しい。なお、IMF は（少なくとも摂動論の範囲では）光円錐量子化との同等性が示されている。以上のことから、光円錐上を出発点として深非弾性散乱を定式化すれば非常に自然な枠組ができると期待される。実際そのような試みは古くから存在するが、あくまでも摂動論の枠内での定式化であった。非摂動的領域までを見越しての定式化は最近の光円錐量子化自身の非摂動的手法の発展まで待たなくてはならなかった。このことについては 4 章で光円錐量子化の今後の可能性として議論する。

3 Present [1980's – 1990's]

光円錐量子化法における非摂動的な手法の開発は 80 年代中頃の Pauli と Brodsky らの仕事を皮切りにして現在まで盛んに研究されている。単に「非摂動的」といっただけでは殆んど何も意味しないのでもう少し意味を限定すると、光円錐量子化での非摂動的な解析は大きく二つに分けられる。一つめは、光円錐量子化法の最大の利点である「真空の自明性」とその反映である「励起状態の記述の簡単さ」を応用した手法を開発していこうという流れであり、二つめは、対称性の自発的破れやトポロジカルな効果などのいわゆる「真空の物理」を光円錐量子化で記述する方法を探るという流れである。

3.1 "Vacuum Triviality" and How to Solve the LF Bound State Equation

光円錐量子化法の最大の利点は、この量子化では相互作用のある理論でも真空が摂動的に定義された Fock 真空のままでよいという「真空の自明性」である。光円錐座標での分散関係 ($P^2 = 2P^+P^- - P_\perp^2 = M^2$)

$$P^- = \frac{P_\perp^2 + M^2}{2P^+} \tag{3}$$

の形から、「光円錐エネルギー」$P^- \geq 0$ とすると、直ちに縦方向の運動量 $P^+ \geq 0$ が従う。つまり、$P^+ \neq 0$ の粒子状態を使ってゼロ運動量状態を作ることができないため、Fock 真空 $|0\rangle$ と混ざる状態が無く、もしメジャーゼロの $P^+ = 0$ 状態を無視できれば真空は Fock 真空のままという結論が得られる。

真空が Fock 真空で良いということは、さらにその上に作った Fock state が励起状態に直接関与することを意味する。よって、一般にある励起状態は Fock state で次のように展開される。

$$|P^+, P_\perp, \lambda\rangle = \sum_{n,\lambda_i} \int \frac{dx_i d^2 k_{\perp i}}{2(2\pi)^3} \Phi^{(n)}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) |n;\ \{x_i P^+, k_{\perp i}, \lambda_i\}\rangle \tag{4}$$

ここで$\Phi^{(n)}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ と $|n; \{x_i P^+, k_{\perp i}, \lambda_i\}\rangle$ は n 体の波動関数と Fock state である。この状態を次の固有値方程式 (Light-Front Bound State Equation, LFBSE) を解くことで求める ($H_{\rm LF} = P^-$)。

$$H_{\rm LF}|P^+, P_\perp, \lambda\rangle = \frac{P_\perp^2 + M^2}{2P^+}|P^+, P_\perp, \lambda\rangle \tag{5}$$

例えばメソンに対して行列表示をすると、次の無限次元固有値方程式を得る。

$$\left(M^2 - \sum_i \frac{k_\perp^2 + m_i^2}{x_i}\right) \begin{pmatrix} \Phi_{q\bar{q}} \\ \Phi_{q\bar{q}g} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle q\bar{q}|H_{\rm int}|q\bar{q}\rangle & \langle q\bar{q}|H_{\rm int}|q\bar{q}g\rangle & \cdots \\ \langle q\bar{q}g|H_{\rm int}|q\bar{q}\rangle & \langle q\bar{q}g|H_{\rm int}|q\bar{q}g\rangle & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{q\bar{q}} \\ \Phi_{q\bar{q}g} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{6}$$

この様な無限次元固有値方程式を解く方法もまた光円錐量子化法独特のものが考え出されており、以下に説明する 3 つの方法が有効であることが知られている。

- **DLCQ (Discretized Light-Cone Quantization)** [3]
  この手法の本質は単に「x^-方向を有限にする」だけだが、その威力はもの凄い。まず x^- を有限にし ($-L \leq x^- < L$)、場には反周期的境界条件を課すことにすると、縦運動量は離散的になる。
  $$p_n^+ = \frac{\pi}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \tag{7}$$
  ここで $p_n^+ > 0$ なので、Fock 真空は完全に孤立し、他と混ざらない。さらに p_n^+が正であることから、全運動量 $P^+ = \sum p_i^+$がある決まった値を与える Fock state の数は有限 (ある正の整数 N を正の整数で分割する場合の数) であり、行列の次元が有限になってしまう。その対角化は数値的には容易である。こうして結合定数の大きさに関係なく励起状態のスペクトルを得ることができる。実際 1+1 次元の QCD ではメソン、バリオンの波動関数と質量を高励起状態まで求めることに成功している [4]。
- **LFTD (Light-Front Tamm-Dancoff approximation)** [5]
  この方法では無限次元の Fock 空間を有限粒子数の空間に限定する。さらに波動関数を有限個の基底で展開し近似すれば LFBSE は有限次元になる。例えば (6) であれば $|{\rm meson}\rangle = |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle + |qq\bar{q}\bar{q}\rangle + \cdots$ を初めの数項のみで近似し、さらにそれを有限個の基底で変分法的に解くことになる。この手法での近似の改良は、higher Fock states を取り入れる方向と、基底の個数を増やす方向の 2 つになる。
- **Similarity Transformation** [6]
  この方法ではハミルトニアンを相似変換 $S^\dagger HS = H'$によって徐々に対角化していく。ハミルトニアンの非対角成分 $H_{ij} = \langle i|H|j\rangle$ は一般にエネルギーの異なる状態間の結合を意味するので、非対角化部分を徐々に消す事ができれば各エネルギースケールが混ざりにくくなる。これは一種の「繰り込み」に相当する。そして、十分各エネルギー間の遷移が起こらないようなハミルトニアンを得ることができれば、そこでの Tamm-Dancoff 近似は、素朴に行なった場合よりもよい近似になると予想される。

3.2 "Vacuum Physics" on the Light Front

光円錐量子化法の最大の利点はその「真空の自明性」である。しかしQCDでの「カイラル対称性の自発的破れ」、「θ 真空」、「グルーオン凝縮」などの重要な性質は理論の真空が複雑な構造を持つことで通常は理解され、「真空の物理」と呼ばれる。では、これらの「真空の物理」は自明な真空構造をもつ光円錐量子化法ではどのようにして記述されるのだろうか。(3) 式をみると、「真空の自明性」の議論が破れる可能性があるのは $P^+=0$ モード（ゼロモード）についてだけであり、この部分に「真空の物理」の情報が押し込まれていると考えられている。このゼロモードの物理を取り扱うには次の3つの方法がある。

1. まともにゼロモードを取り扱う立場 [7]。DLCQ & 周期的境界条件で、直接ゼロモード自由度を扱う。
2. IR cutoff を導入してゼロモードを完全に排除する立場 [8]。(3) 式より、ゼロモード付近はエネルギーが発散することに注意。ゼロモードが持つはずの「非自明な真空」の情報は赤外発散に対する counter term が担うことになるので、非摂動的に繰り込みをする必要がある。
3. 光円錐直上から離れる立場 [9]。極限では光円錐量子化に一致するような量子化を考える。真空は自明ではなくなるが、真空の物理を議論することはできる。

このうち スカラー理論における自発的対称性の破れは 1. の方法でよく調べられており [10]、以下ではこの立場で南部 Jona-Lasinio 模型におけるカイラル対称性の破れを議論した我々の仕事を紹介しよう。スカラー理論でのやり方を利用するために、次の「カイラル湯川模型」を考える [11]。

$$\mathcal{L}=\bar{\Psi}_a(i\partial\!\!\!/-m)\Psi_a+\frac{N}{2\mu^2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma+\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi)-\frac{N}{2\lambda}(\sigma^2+\pi^2)-\sigma\bar{\Psi}_a\Psi_a-\pi\bar{\Psi}_a i\gamma_5\Psi_a, \tag{8}$$

ここで$\mu\to\infty$ の極限でσ とπ は補助場となりこの模型は南部 Jona-Lasinio 模型に帰着する。また、$1/N$ 展開を用いるために N 成分のフェルミオンΨ_a $(a=1,\ldots,N)$ を扱う。通常の枠組では $1/N$ 展開の主要項近似（フェルミオンの1ループ）の結果、$m=0$ のときに持つカイラル対称性は $\langle\sigma\rangle=-\frac{\lambda}{N}\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle\neq0$ によって自発的に破れることが容易に示せる。同じことを光円錐量子化で記述したい。そこでこの系を DLCQ で取り扱い、（スカラーに対して）周期的境界条件を課そう。するとゼロモード

$$\sigma_0(x_\perp)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}dx^-\ \sigma(x),\quad \pi_0(x_\perp)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}dx^-\ \pi(x) \tag{9}$$

をあからさまに扱えるようになる。さて、この系には光円錐量子化に特徴的な3つの拘束がある。フェルミオンの "bad component"ψ_- に対する拘束と2つのゼロモードに対する拘束である。

$$2i\partial_-\psi_-^a=(i\gamma^\perp\partial_\perp+m+\sigma-i\pi\gamma_5)\gamma^+\psi_+^a\ , \tag{10}$$

$$\left(\frac{\mu^2}{\lambda}-\partial_\perp^2\right)\begin{pmatrix}\sigma_0\\ \pi_0\end{pmatrix}-\frac{\mu^2}{N}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-L}^{L}\frac{dx^-}{2L}\left[\psi_+^{a\dagger}\begin{pmatrix}-1\\ i\gamma_5\end{pmatrix}\gamma^-\psi_-^a+\psi_-^{a\dagger}\begin{pmatrix}-1\\ i\gamma_5\end{pmatrix}\gamma^+\psi_+^a\right]=0 \tag{11}$$

ここで$\Psi=\psi_++\psi_-$, $\psi_\pm=\Lambda_\pm\Psi$, $\Lambda_\pm=\gamma^0\gamma^\pm/\sqrt{2}$. これらの拘束は、$\sigma_0$, π_0 および ψ_- が独立な自由度ではなく、スカラーの振動モードφ_σ, φ_πおよびフェルミオンの "good component" ψ_+によって書かれることを意味する。さて、ゼロモードを c 数部分と（正規順序化された）演算子部分に分けて書こう $\sigma_0=\sigma_0^{(\mathrm{c})}+\sigma_0^{(\mathrm{op})}$, $\pi_0=\pi_0^{(\mathrm{c})}+\pi_0^{(\mathrm{op})}$. もしこれらの c 数部分がゼロでないような解を求めることができたらそれは直ちに対称性の破れを与える。$\langle0|\sigma|0\rangle=\sigma_0^{(\mathrm{c})}\neq0$, $\langle0|\pi|0\rangle=\pi_0^{(\mathrm{c})}\neq0$. 従ってそのような解を見つけることが本質的であり、このアイディアの有効性はスカラー理論では確かめられている。そして、カイラル対称性の破れは、「ゼロモード拘束」を量子論的にかつ非摂動的に解くことで記述される。以下に我々の解析の結果をまとめる [11]。

- $1/N$ 展開の主要項でσに対するゼロモード拘束が次のギャップ方程式に帰着することが示される。

$$M-m=\lambda M\frac{\Lambda^2}{4\pi^2}\left\{2-\frac{M^2}{\Lambda^2}\left(1+\ln\frac{2\Lambda^2}{M^2}\right)\right\} \tag{12}$$

  ここで $M=m+\sigma_0^{(\mathrm{c})}$はフェルミオンの物理的質量である。この式を得る際、赤外発散の処理を慎重に行う必要がある（ここではパリティ不変な切断を導入)。ギャップ方程式の非自明な解 $(M\neq0)$ を選ぶとカイラル対称性の破れた理論を得る。一方、自明な解 $(M=0)$ はカイラル対称な理論を与える。
- カイラル対称性の破れた相と破れていない相でそれぞれ異なるラグランジアンを使い分けて、σ や πの質量を求めることができる。破れた相ではπ の質量は $m=0$ ではゼロになり、十分小さな $m\neq0$ では Gell-Mann, Oakes, Renner 関係式を満たす。
- 光円錐上では対称性によらずに $Q_5^{\mathrm{LF}}|0\rangle=0$ が成り立ってしまうので $\langle0|\bar{\Psi}\Psi|0\rangle\neq0$ と一見矛盾するように見えるが、それは破れた相でのカイラル変換が変更を受ける $[Q_5^{\mathrm{LF}},\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi]\neq2i\bar{\Psi}\Psi$ ことで解決する。

- カイラルチャージ $Q_5^{\rm LF}$は $m \to 0$ でも保存されないが、その原因がパイオンのゼロモードの特異的な振舞い$\pi_0 \sim 1/m$ に起因することが PCAC 関係式を通じてわかった。

なお、カイラル湯川模型 (8) を用いた間接的な方法でなく、南部 Jona-Lasinio 模型を直接解析しても破れを議論できることがわかっている [12]。その場合はψ_-に対する複雑な拘束を解くことが重要になる。

4 Near Future [2000's −]

最後に光円錐量子化が今後取り組んでいくべき問題について触れる。まず、光円錐量子化法を用いれば QCD から構成子クォーク的描像が導けると期待されている [8]。そしてこの可能性をもう少し別の視点から見れば、深非弾性散乱の「非摂動的」な記述の枠組を自然に与えるものとしての光円錐量子化法が見えてくる。既に述べたように、深非弾性散乱にとってパートン描像が明白な光円錐上を出発点とすることは自然である。そしてごく最近、Harindranath らによって深非弾性散乱の「非摂動的」な記述を含む定式化がなされた [13]。光学定理 $W^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}{\rm Im}T^{\mu\nu}$によって $W^{\mu\nu}$と関係づく virtual Compton 散乱の振幅 $T^{\mu\nu} = i\int d^4\xi\ e^{iq\xi}\langle PS|T(J^\mu(\xi)J^\nu(0))|PS\rangle$ は Bjorken 極限において光円錐同時刻での 2 点関数で書けるので、それを出発点にすると、一般の場合はその同時刻面からのずれとして表される。すなわち、

$$T^{\mu\nu} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q^-}\right)^{n+1}\int d\xi^- d^2\xi_\perp\ e^{iq\xi}\Big\langle PS\Big|\Big[\left(i\frac{\partial}{\partial\xi^+}\right)^n J^\mu(\xi),\ J^\nu(0)\Big]_{\xi^+=0}\Big|PS\Big\rangle. \tag{13}$$

つまり、この展開は光円錐エネルギーについての展開になっている。この記述の利点は全てが$\xi^+ = 0$ で評価できるということで、今まで述べてきた光円錐量子化法のハミルトン形式をこの行列要素を評価するのに直接利用することができる。すなわち、状態 $|PS\rangle$ は束縛状態の方程式 (5) を解いて与えればよい。そして、この枠組では高エネルギーから低エネルギーまでの深非弾性散乱を統一的に記述できると期待される。

応用可能な具体的な問題を挙げよう。例えば、パイオンの波動関数は Brodsky と Lepage の求めた $Q^2 \to \infty$ での形 $\phi_{\rm BL}(x) = \sqrt{3}f_\pi x(1-x)$ と Chernyak と Zhitnitsky が QCD 和則から求めた $Q^2 \sim (0.5{\rm GeV})^2$ での形 $\phi_{\rm CZ}(x) = 5\sqrt{3}x(1-x)(1-2x)^2$は大きく異なり、現実の波動関数がどのような形であるか、あるいはどのようにしてこれらの 2 つの波動関数が関係つくのかなどの問題がある。これらの問題に対して光円錐量子化法での統一的な記述はまさにふさわしいと考えられる。前章の最後に触れた南部 Jona-Lasinio 模型では $1/N$ 展開の主要項の近似（平均場近似）では、$|\pi\rangle = |q\bar{q}\rangle$ で表され、パイオンの波動関数を具体的に求めることができる [12]。同じことを繰り込み可能な理論で行なえば高エネルギーから低エネルギーまでエネルギーが変化するときの波動関数の変化を議論できる。これは非摂動領域を含むため、通常の Q^2発展とは異なることに注意して欲しい。つまり、摂動論では行けない領域にまで踏み込むことが原理的には可能なのである。

参考文献

[1] S. Brodsky, H. C. Pauli, and S. Pinsky, Phys. Rep. **301** (1998) 299.

[2] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 392.

[3] H. C. Pauli and S. J. Brodsky, Phys. Rev. **D32** (1985) 1993; *ibid.* **D32** (1985) 2001.

[4] K. J. Hornbostel, S. J. Brodsky, and H. C. Pauli, Phys. Rev. **D41** (1990) 3814.

[5] R. J. Perry, A. Harindranath, and K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 2959.

[6] S.D.Glazek and K. Wilson, Phys. Rev. **D48** (1993) 5863, *ibid.* **D49** (1994) 4214.

[7] T. Maskawa and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 270.

[8] K. Wilson, et al. Phys. Rev. **D49** (1994) 6720.

[9] For example, K. Hornbostel, Phys. Rev. **D45** (1992) 3781.

[10] T. Heinzl, et al., Z. Phys. C72 (1996) 353 and references therein.

[11] K. Itakura and S. Maedan, Prog. Theor. Phys. **97** (1997) 635; K. Itakura and S. Maedan, "*Dynamical Chiral Symmetry Breaking on the Light Front I. DLCQ Approach*" hep-th/9907071.

[12] K. Itakura, Prog. Theor. Phys. **97** (1997) 635; K. Itakura, Ph. D. Thesis (Univ. of Tokyo, Dec. 1996); K. Itakura and S. Maedan, "*Dynamical Chiral Symmetry Breaking on the Light Front II. NJL Model in the Continuum Approach*" (in preparation).

[13] A. Harindranath, R. Kundu, and W-M. Zhang, Phys. Rev. **D59** (1999) 094012, 094013.