

CEA - R - 3672  
PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

8.2

## ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

*par*

*Jean - Marc FAUQUE, Daniel BERTHIER,*

*Jacques MAX, Georges BONNET*

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble

Rapport CEA - R - 3672

1969

Ga

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N. - SACLAY B.P. n°2, 91 - GIF-sur-YVETTE - France

CEA-R-3672 - FAUQUE Jean-Marc, BERTHIER Daniel,  
MAX Jacques, BONNET Georges

### ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

Sommaire.- La densité spectrale d'un signal qui représente la répartition de sa puissance sur l'axe des fréquences est une fonction de première importance, constamment utilisée dans tout ce qui touche le traitement du signal (identification de processus, analyse de vibrations, etc...).

Parmi toutes les méthodes possibles de calcul de cette fonction, la méthode par corrélation (calcul de la fonction de corrélation + transformation de Fourier) est très séduisante par sa simplicité et ses performances.

L'étude qui est faite ici va déboucher sur la réalisation d'un appareil qui, couplé à un corrélateur, constituera un ensemble d'analyse spectrale en temps réel couvrant la

./.

---

CEA-R-3672 - FAUQUE Jean-Marc, BERTHIER Daniel,  
MAX Jacques, BONNET Georges

### SPECTRAL ANALYSIS BY CORRELATION

Summary.- The spectral density of a signal, which represents its power distribution along the frequency axis, is a function which is of great importance, finding many uses in all fields concerned with the processing of the signal (process identification, vibrational analysis, etc...).

Amongst all the possible methods for calculating this function, the correlation method (correlation function calculation + Fourier transformation) is the most promising, mainly because of its simplicity and of the results it yields.

The study carried out here will lead to the construction of an apparatus which, coupled with a correlator, will

./.

gamme de fréquence (0 à 5 MHz).

1969

77 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

---

constitute a set of equipment for spectral analysis in real time covering the frequency range 0 to 5 MHz.

1969

77 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7<sup>e</sup>.

## PLAN DE CLASSIFICATION

- |   |   |
|---|---|
| <b>1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS</b>   | <b>8. PHYSIQUE</b>  |
| <b>2. BIOLOGIE ET MEDECINE</b>  | 8. 1 Accélérateurs<br>8. 2 Electricité, électronique, détection des rayonnements<br>8. 3 Physique des plasmas<br>8. 4 Physique des états condensés de la matière<br>8. 5 Physique corpusculaire à haute énergie<br>8. 6 Physique nucléaire<br>8. 7 Electronique quantique, lasers |
| 2. 1 Biologie générale<br>2. 2 Indicateurs nucléaires en biologie<br>2. 3 Médecine du travail<br>2. 4 Radiobiologie et Radioagronomie<br>2. 5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine | <b>9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHÉMATIQUES</b>   |
| <b>3. CHIMIE</b>  | <b>10. PROTECTION ET CONTRÔLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS</b>  |
| 3. 1 Chimie générale<br>3. 2 Chimie analytique<br>3. 3 Procédés de séparation<br>3. 4 Radiochimie   | 10. 1 Protection sanitaire<br>10. 2 Contrôle des rayonnements<br>10. 3 Traitement des effluents   |
| <b>4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE</b>   | <b>11. SÉPARATION DES ISOTOPES</b>  |
| <b>5. GÉOPHYSIQUE, GÉOLOGIE, MINÉRALOGIE ET MÉTÉOROLOGIE</b>  | <b>12. TECHNIQUES</b>   |
| <b>6. MÉTAUX, CÉRAMIQUES ET AUTRES MATÉRIAUX</b>  | 12. 1 Mécanique des fluides - Techniques du vide<br>12. 2 Techniques des températures extrêmes<br>12. 3 Mécanique et outillage  |
| 6. 1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux<br>6. 2 Effets des rayonnements sur les matériaux<br>6. 3 Corrosion   | <b>13. UTILISATION ET DÉVELOPPEMENT DE L'ÉNERGIE ATOMIQUE</b>   |
| <b>7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES RÉACTEURS</b>  | 13. 1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines<br>13. 2 Divers (documentation, administration, législation, etc...)  |
| 7. 1 Neutronique et physique des réacteurs<br>7. 2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité<br>7. 3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs                        | <b>14. ETUDES ÉCONOMIQUES ET PROGRAMMES</b>   |

- Rapport CEA-R-3672 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble  
Laboratoire d'Electronique  
et de Technologie de l'Informatique

### ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

par

Jean-Marc FAUQUE, Daniel BERTHIER,  
Jacques MAX, Georges BONNET

Note Technique LETI/TS 453

- Janvier 1969 -

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VII<sup>e</sup>.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VII<sup>e</sup>.

## ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

### INTRODUCTION

Depuis qu'il existe des appareils permettant de mesurer en temps réel les fonctions d'auto et d'intercorrélation, il est apparu que dans de nombreux cas l'interprétation des résultats est difficile.

Le travail développé ici doit permettre d'obtenir par transformation de Fourier de la fonction de corrélation une fonction plus familière et souvent plus exploitable qui est la densité spectrale énergétique.

La méthode de transformation de Fourier qui est exposée va aboutir prochainement à la réalisation d'un appareil qui couplé à un corrélateur constituera un ensemble d'analyse spectrale en temps réel couvrant la gamme (0 - 5 MHz).

CHAPITRE I

---

ANALYSE SPECTRALE

PROCEDES DE CALCUL DES DENSITES SPECTRALES

- 1 - Notions d'énergie et de puissance - Analyse spectrale.
- 2 - Calcul direct ou par corrélation des densités spectrales.
- 3 - Comparaison des différentes méthodes d'analyse.
- 4 - Signification physique et propriétés des densités spectrales.

1 - NOTIONS D'ENERGIE ET DE PUISSANCE. ANALYSE SPECTRALE -

Soit un signal  $X(t)$ , définissons l'énergie et la puissance de ce signal :

- Energie du signal pendant un intervalle de temps  $dt$  :  $dE = X^2(t) dt$ .

- Puissance instantanée ou densité temporelle d'énergie :  $P(t) = X^2(t)$ .

- Puissance moyenne temporelle dans un intervalle de temps  $(t, t+T)$  :

$$P_m(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X^2(t) dt.$$

- Puissance moyenne temporelle totale :

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X^2(t) dt.$$

- Energie totale :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(t) dt.$$

Nous voyons que les signaux vont se diviser en deux catégories : d'une part ceux qui ont une puissance moyenne  $P_m$  finie et une énergie totale infinie et, d'autre part, ceux qui ont une énergie totale  $E$  finie et une puissance moyenne nulle.

1.1 - Signaux de puissance moyenne finie

Examinons tout d'abord les signaux périodiques soit  $T_0$  la période posons  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ .

Si  $X(t)$  est un tel signal, il admet un développement en série de Fourier :

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \text{avec} \quad C_n = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} X(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Sa fonction d'autocorrélation est :

$$C_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 e^{j2\pi n f_0 \tau}$$

Sa puissance moyenne totale se ramène à sa puissance moyenne sur une période :

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} X^2(t) dt$$

L'égalité de Parseval :

$$P_m = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} X^2(t) dt = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

montre que la puissance moyenne de X (t) est la somme des puissances moyennes de chacun de ses harmoniques, il n'y a pas d'interaction entre les différentes fréquences constitutives de X (t).

Nous avons donc la possibilité de décrire la localisation de la puissance moyenne sur l'axe des fréquences par la fonction :

$$S_{xx}(f) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta(f - n f_0)$$

densité spectrale énergétique du signal, c'est une densité de puissance sur l'axe des fréquences :

- La puissance moyenne dans une bande de fréquence  $f_1 f_2$  est  $\int_{f_1}^{f_2} S_{xx}(f) df$ .
- La puissance moyenne totale est  $P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$ .

Cette fonction  $S_{xx}(f)$  est transformée de Fourier de  $C_{xx}(\tau)$ , la fonction d'auto-corrélation contient donc toute l'information de répartition spectrale de la puissance.

Plus généralement, pour un signal stationnaire non périodique la densité spectrale énergétique est également transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, mais elle se présente comme une courbe continue et non plus comme une suite de valeurs discrètes.

1.2 - Signaux d'énergie totale finie

Ils possèdent une transformée de Fourier  $x(f)$ .

L'égalité de Parseval :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df$$

montre que c'est la fonction :

$$S_{xx}(f) = |x(f)|^2$$

qui représente la densité d'énergie totale sur l'axe des fréquences, cette densité spectrale est également transformée de Fourier de la fonction de corrélation comme pour les signaux de puissance moyenne finie.

2 - CALCUL DIRECT OU PAR CORRELATION DES DENSITES SPECTRALES

Une densité spectrale, densité spectrale énergétique d'un signal ou densité spectrale d'interaction entre deux signaux peut se calculer de deux façons différentes :

- soit par transformation de Fourier de la fonction d'auto-corrélation ou d'inter-corrélation correspondante.
- soit de façon directe en procédant par transformation de Fourier du signal lui-même.

Donnons pour divers types de signaux la définition de la paire de Fourier :

Fonction de corrélation  $\iff$  densité spectrale

(cette dernière sous sa forme directe calculée à partir du signal).

2.1 - Signal aléatoire, stationnaire de second ordre

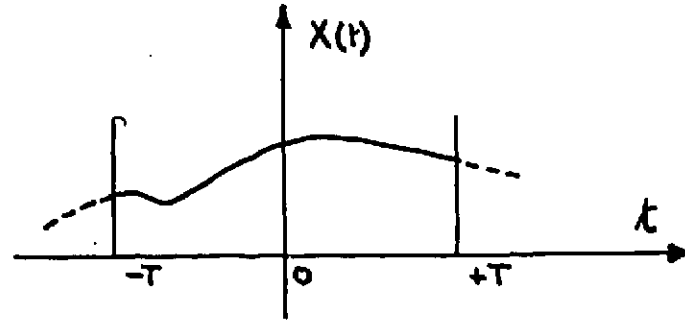
- Autocorrélation et densité spectrale énergétique de X (t)

$$C_{xx}(\tau) = E(X(t) X(t - \tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) X(t - \tau) dt$$

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left( \frac{|x(f, T)|^2}{2T} \right)$$

$x(f, T)$  est la transformée de Fourier de la tranche  $(-T, +T)$  de la réalisation  $X(t)$  du signal (figure 1)





- Intercorrélation et densité spectrale d'interaction entre X (t) et Y (t)

$$C_{yx}(\tau) = E(Y(t) X(t - \tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} Y(t) X(t - \tau) dt$$

$$S_{yx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\frac{y(f, T) x^*(f, T)}{2T}\right)$$

2.2 - Signal périodique de période To

Si l'on applique les définitions précédentes, la densité spectrale que l'on obtient se présente comme une courbe continue présentant des pics aux fréquences  $n f_0$  où est localisée la puissance.

C'est l'aire d'un pic qui est significative de la quantité de puissance présente, et non son allure, celle-ci est plus ou moins aigüe suivant l'étendue de l'intervalle de définition  $(-\tau_M, +\tau_M)$  de la fonction de corrélation ou  $(-T, +T)$  du signal (selon la méthode employée).

Si  $\tau_M$  ou T croît chaque pic se déforme en gardant une aire constante, sa hauteur diverge linéairement avec  $\tau_M$  ou T et simultanément sa largeur diminue, il tend vers une raie de Dirac.

On peut donc avoir intérêt à calculer seulement le poids de ces différentes raies, ce poids est égal à la hauteur du pic divisée par l'étendue de l'intervalle de définition  $2\tau_M$  ou  $2T$ .

Par exemple en calcul direct le poids de la raie située à la fréquence  $n f_0$  est :

$$|C_n|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x(n f_0, T)|^2}{4 T^2}$$

Si le signal X (t) n'est pas déterministe mais aléatoire périodique stationnaire, les poids des différentes raies sont :

$$E(|C_n|^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\frac{|x(n f_0, T)|^2}{4 T^2}\right)$$

Si la densité spectrale présente une partie continue et un certain nombre de raies on calculera séparément la partie continue et les poids des différentes raies.

2.3 - Signal déterministe, transitoire, de carré sommable

- Autocorrélation et densité spectrale énergétique de X (t)

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) X(t - \tau) dt \iff S_{xx}(f) = |x(f)|^2$$

$x(f)$  est transformée de Fourier de X (t).

- Intercorrélation et densité spectrale d'interaction entre X (t) et Y (t)

$$C_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) X(t - \tau) dt \iff S_{yx}(f) = y(f) x^*(f)$$

3 - COMPARAISON DES DIFFERENTES METHODES D'ANALYSE

3.1 - Analyse spectrale par filtre sélectif

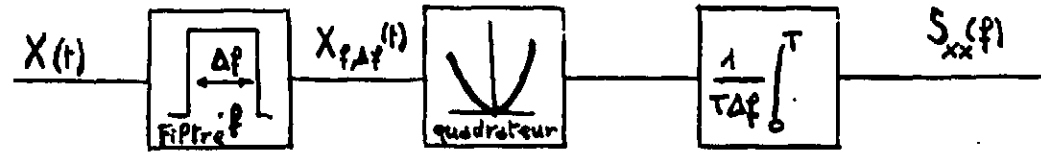
Cette méthode d'analyse spectrale est la plus directe, on isole une tranche de fréquence du signal étudié au moyen d'un filtre et l'on évalue la puissance qu'elle contient.

- Densité spectrale énergétique d'un signal

Elle a pour expression :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{T \Delta f} \int_0^T X_{f, \Delta f}^2(t) dt$$

$X_{f, \Delta f}(t)$  est le signal de sortie du filtre centré en f et de largeur  $\Delta f$ . La figure 2 donne le schéma de principe du dispositif.



Pour balayer la gamme de fréquences que l'on veut étudier on a recours :

- soit à une batterie de filtres fonctionnant en parallèle chacun donnant en permanence un point du spectre.
- soit à un procédé hétérodyne, avec un seul filtre, en calculant de façon successive la suite des fréquences désirées, on ne travaille plus en temps réel à moins de recourir à la compression de temps, pour les signaux basse fréquence.

Densité spectrale d'interaction entre deux signaux

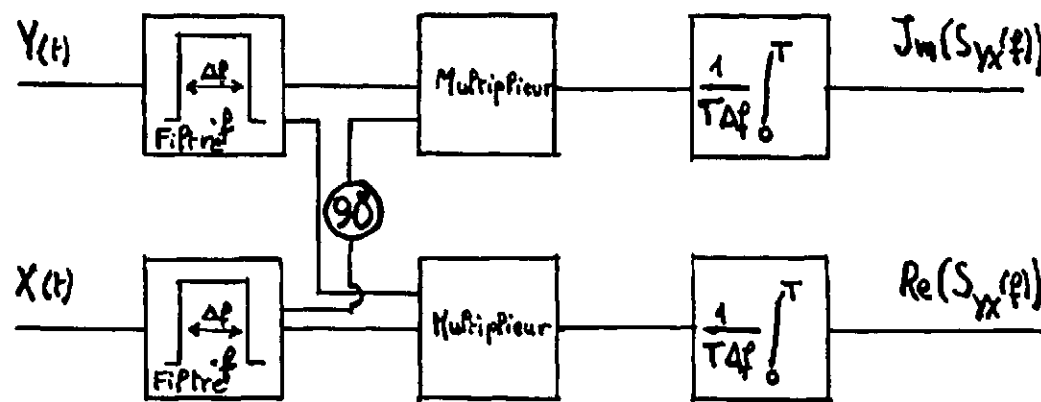
C'est une quantité complexe, ses parties réelles et imaginaires ont pour expression :

$$\text{Re}(S_{yx}(f)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{T \Delta f} \int_0^T Y_{f, \Delta f}(t) X_{f, \Delta f}(t) dt$$

$$\text{Im}(S_{yx}(f)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{T \Delta f} \int_0^T Y_{f, \Delta f}(t) \hat{X}_{f, \Delta f}(t) dt$$

$\hat{X}_{f, \Delta f}$  est  $X_{f, \Delta f}$  déphasé de  $90^\circ$

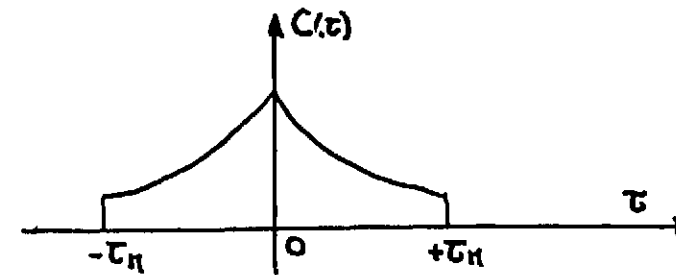
La figure 3 donne le schéma de principe du dispositif.



3.2 - Analyse par transformation de Fourier - Comparaison entre le calcul direct et le calcul par corrélation

A - Calcul à partir de la fonction de corrélation

Soit  $C(\tau)$  la fonction de corrélation définie dans l'intervalle  $(-\tau_M, +\tau_M)$  (figure 4).



- d'une densité spectrale énergétique

$$S_{xx}(f) = \int_{-\tau_M}^{+\tau_M} C_{xx}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau$$

- d'une densité spectrale d'interaction

$$\text{Re}(S_{yx}) = \int_{-\tau_M}^{+\tau_M} C_{yx}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau$$

$$\text{Im}(S_{yx}) = - \int_{-\tau_M}^{+\tau_M} C_{yx}(\tau) \sin 2\pi f \tau d\tau$$

B - Calcul direct à partir du signal

A l'instant  $t$  on effectue les calculs sur une tranche  $(t - T, t)$  de signal (figure 5).



- d'une densité spectrale énergétique

$$a_x = \int_{t-T}^t X(t) \cos 2\pi f t dt$$

$$b_x = \int_{t-T}^t X(t) \sin 2\pi f t dt$$

il faut calculer  $a_x^2 + b_x^2$  et moyenner le résultat à mesure que la tranche de signal  $(t - T, t)$  se déplace dans le temps.

- d'une densité spectrale d'interaction.

Pour la partie réelle, il faut calculer :  $\frac{a}{y} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \frac{b}{x}$   
 et pour la partie imaginaire :  $\frac{a}{y} \frac{b}{x} - \frac{a}{x} \frac{b}{y}$

et moyenner ces deux quantités.

La deuxième méthode a sur la première, l'avantage de ne pas nécessiter l'obtention préalable de la fonction de corrélation, mais par contre elle aboutit à un grand nombre de calculs puisque les résultats n'ont qu'une valeur statistique et qu'il est nécessaire de les moyenner.

4 - SIGNIFICATION PHYSIQUE ET PROPRIETES DES DENSITES SPECTRALES -

4.1 - Densité spectrale énergétique d'un signal X (t)

$$\int_{f_1}^{f_2} S_{xx}(f) df = \begin{cases} P_m \\ E \end{cases} \text{ dans la bande } f_1 f_2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df = C_{xx}(0) = \begin{cases} P_m \\ E \end{cases}$$

( $P_m$  pour les signaux de puissance finie,  $E$  pour les signaux d'énergie finie).

- .  $S_{xx}(f) = F(C_{xx}(\tau))$  transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation
- .  $S_{xx}(f)$  est réelle
- .  $S_{xx}(f) \geq 0$
- .  $S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$

4.2 - Densité spectrale d'interaction entre deux signaux Y (t) et X (t)

- .  $S_{yx}(f) = F(C_{yx}(\tau))$  transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélacion
- .  $S_{yx}(f) = S_{xy}^*(f)$

Signification physique

Considérons  $Z(t) = X(t) + Y(t)$

la fonction d'autocorrélation de  $Z(t)$  est :

$$C_{zz}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{xy}(\tau) + C_{yx}(\tau) + C_{yy}(\tau)$$

et sa densité spectrale :

$$S_{zz}(f) = S_{xx}(f) + S_{xy}(f) + S_{yx}(f) + S_{yy}(f)$$

la propriété  $S_{yx}(f) = S_{xy}^*(f)$  entraîne :

$$S_{zz}(f) = S_{xx}(f) + S_{yy}(f) + 2 \operatorname{Re}(S_{yx}(f))$$

La partie réelle de la densité spectrale d'interaction est la moitié de la densité spectrale qui doit être ajoutée à la somme des densités de  $X$  et de  $Y$  pour obtenir celle de  $Z$  ; elle représente l'apport d'énergie dû à la corrélation entre  $X$  et  $Y$ .

CHAPITRE II

---

CALCUL DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION DE  
CORRELATION CONNUE SOUS FORME ECHANTILLONNEE

- 1 - Théorème de Shannon. Restitution de l'information après échantillonnage.
- 2 - Application au calcul de la transformée de Fourier d'une fonction de corrélation connue sous forme échantillonnée.

1 - THEOREME DE SHANNON. RESTITUTION DE L'INFORMATION APRES ECHANTILLONNAGE -

1.1 - Théorème de Shannon

Soit une fonction du temps  $F(\tau)$  possédant une transformée de Fourier  $G(f)$ .

Considérons la fonction :

$$F^*(\tau) = \Delta \tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} F(i \Delta \tau) \delta(\tau - i \Delta \tau)$$

qui est une représentation échantillonnée de  $F(\tau)$  avec un pas d'échantillonnage  $\Delta \tau$ .

Nous pouvons écrire :  $F^*(\tau) = F(\tau) \cdot P_{\infty}(\tau)$

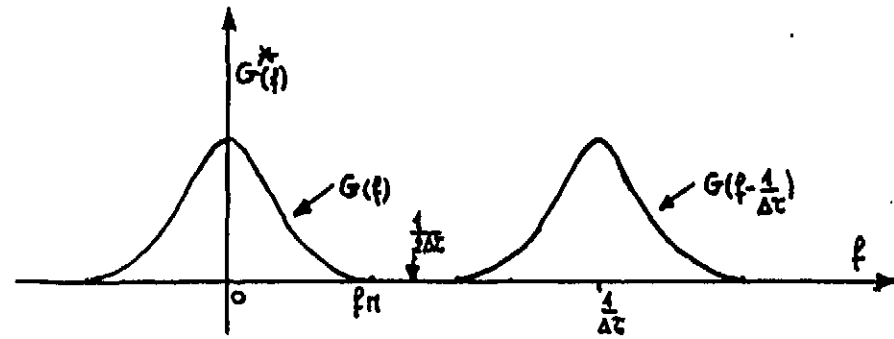
$$\text{avec } P_{\infty}(\tau) = \Delta \tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - i \Delta \tau).$$

Soit  $G^*(f)$  la transformée de Fourier de  $F^*(\tau)$  dans le domaine spectral la relation ci-dessus devient :

$$G^*(f) = G(f) * Q_{\infty}(f)$$

$Q_{\infty}$  est transformée de Fourier de  $P_{\infty}(\tau)$  soit  $Q_{\infty}(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{j}{\Delta \tau})$

$$G^*(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G(f - \frac{j}{\Delta \tau})$$



Nous voyons apparaître que l'échantillonnage n'apporte pas de perte d'information, à condition, que la fréquence de Nyquist  $\frac{1}{2 \Delta \tau}$  soit supérieure à  $f_M$  fréquence au-delà de laquelle  $G(f)$  est nul (figure 6).

1.2 - Restitution de l'information

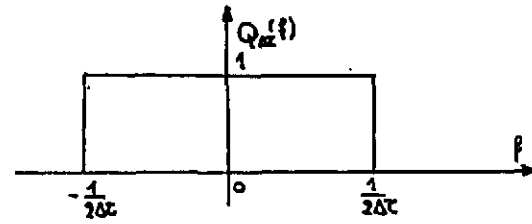
Dans le domaine spectral la restitution de  $G(f)$  à partir de  $G^*(f)$  se fait par :

$$G(f) = G^*(f) Q^*(f) \text{ avec } Q_{\Delta \tau}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq \frac{1}{2 \Delta \tau} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

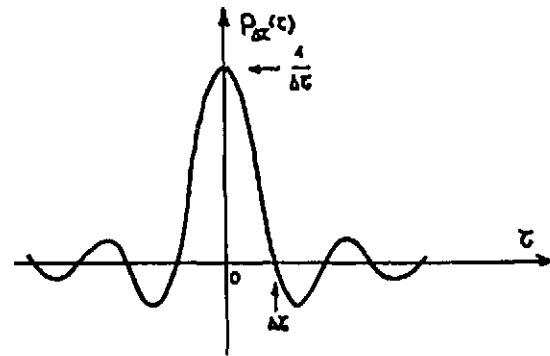
donc dans le domaine temporel la restitution de  $F(\tau)$  à partir de  $F^*(\tau)$  se fait par :

$$F(\tau) = F^*(\tau) \cdot P_{\Delta \tau}(\tau) \text{ avec } P_{\Delta \tau}(\tau) = \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\sin \frac{\pi \tau}{\Delta \tau}}{\frac{\pi \tau}{\Delta \tau}}$$

$$F(\tau) = \Delta \tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (F(i \Delta \tau) \delta(\tau - i \Delta \tau)) \cdot \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\sin \frac{\pi \tau}{\Delta \tau}}{\frac{\pi \tau}{\Delta \tau}}$$

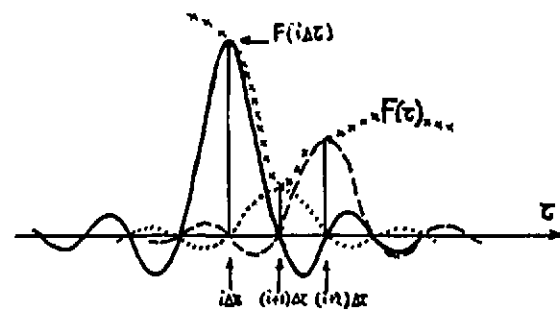


- Figure 7 -



- Figure 8 -

$$F(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} F(i \Delta \tau) \frac{\sin \pi \frac{(\tau - i \Delta \tau)}{\Delta \tau}}{\frac{\pi (\tau - i \Delta \tau)}{\Delta \tau}}$$



- Figure 9 -

Si le théorème de Shannon est respecté ( $f_M < \frac{1}{2 \Delta \tau}$ ) l'échantillonnage n'apporte aucune perte d'information, puisque l'on peut restituer  $F(\tau)$  à partir de sa représentation

échantillonnée  $F^*(\tau)$ , en sommant une suite de courbes du type  $\frac{\sin \frac{\pi \tau}{\Delta \tau}}{\frac{\pi \tau}{\Delta \tau}}$  centrées aux temps  $i \Delta \tau$  chacune ayant pour amplitude au sommet  $F(i \Delta \tau)$  (figure 9).

2 - APPLICATION AU CALCUL DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION DE CORRELATION CONNUE SOUS FORME ECHANTILLONNEE

2.1 - Passage de l'intégrale continue à la série discrète

Il s'agit de calculer :  $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$ , de partie réelle :

$$S_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau$$

calcul du type :  $S_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(\tau) d\tau$  avec  $\begin{cases} f(\tau) = C(\tau) \\ g(\tau) = \cos 2\pi f \tau \end{cases}$

Supposons  $f(\tau)$  et  $g(\tau)$  connues toutes deux sous forme échantillonnée, avec un pas  $\Delta \tau$  qui respecte le théorème de Shannon pour  $f(\tau)$  d'une part et pour  $g(\tau)$  d'autre part ; on peut alors restituer ces deux fonctions à partir de leurs échantillons :

$$f(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i \Delta \tau) \frac{\sin \frac{\pi (\tau - i \Delta \tau)}{\Delta \tau}}{\frac{\pi (\tau - i \Delta \tau)}{\Delta \tau}} = \Delta \tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i \Delta \tau) P_{\Delta \tau}(\tau - i \Delta \tau)$$

$$\text{et } g(\tau) = \Delta \tau \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(j \Delta \tau) P_{\Delta \tau}(\tau - j \Delta \tau)$$

Remplaçons :

$$S_R(f) = \Delta \tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sum_j f(i \Delta \tau) g(j \Delta \tau) P_{\Delta \tau}(\tau - i \Delta \tau) P_{\Delta \tau}(\tau - j \Delta \tau) d\tau$$

$$= \Delta \tau^2 \sum_i \sum_j f(i \Delta \tau) g(j \Delta \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Delta \tau}(\tau - i \Delta \tau) P_{\Delta \tau}(\tau - j \Delta \tau) d\tau$$

les fonctions  $P_{\Delta \tau}(\tau)$  sont orthogonales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Delta \tau}(\tau - i \Delta \tau) P_{\Delta \tau}(\tau - j \Delta \tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{\Delta \tau} & \text{si } i = j \end{cases}$$

l'intégrale dégénère donc en une série discrète :

$$S_R(f) = \Delta\tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i\Delta\tau) g(i\Delta\tau)$$

soit

$$S_R(f) = \Delta\tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C(i\Delta\tau) \cos 2\pi f(i\Delta\tau)$$

Aucune erreur ne s'introduit donc dans le passage continu-discret à la seule condition que le pas  $\Delta\tau$  respecte le théorème de Shannon pour  $C(\tau)$  et pour  $\cos 2\pi f\tau$ .

Il en est de même pour la partie imaginaire  $S_I(f)$ , on peut faire le même calcul en posant  $g(\tau) = \sin 2\pi f\tau$ .

La fonction  $g(\tau) = \cos 2\pi f\tau$  a pour représentation spectrale une raie de Dirac à la fréquence  $f$ , pour que le pas  $\Delta\tau$  respecte le théorème de Shannon il faut que  $f < \frac{1}{2\Delta\tau}$ .

Moyennant deux conditions :

. L'échantillonnage respecte le théorème de Shannon pour  $C(\tau)$  (ce qui en général est impossible à réaliser rigoureusement).

. On se limite à la gamme de fréquence  $(-\frac{1}{2\Delta\tau}, +\frac{1}{2\Delta\tau})$  les deux algorithmes :

$$S_R(f) = \Delta\tau (\dots C(-k\Delta\tau) \cos 2\pi f(-k\Delta\tau) \dots + C(0) + C(\Delta\tau) \cos 2\pi f(\Delta\tau) \dots + C(k\Delta\tau) \cos 2\pi f(k\Delta\tau) \dots)$$

$$S_I(f) = -\Delta\tau (\dots C(-k\Delta\tau) \sin 2\pi f(-k\Delta\tau) \dots + 0 + C(\Delta\tau) \sin 2\pi f(\Delta\tau) \dots + C(k\Delta\tau) \sin 2\pi f(k\Delta\tau) \dots)$$

donnent la valeur exacte des parties réelles et imaginaires de  $S(f)$ .

Que se passe-t-il si ces conditions ne sont pas respectées ?

Calculons  $S^*(f)$  transformée de Fourier de

$$C^*(\tau) = \Delta\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k\Delta\tau) \delta(\tau - k\Delta\tau)$$

$$S^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k\Delta\tau) \delta(\tau - k\Delta\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Delta\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k\Delta\tau) e^{-j2\pi f(k\Delta\tau)}$$

c'est le développement en série de Fourier de  $S^*(f)$ , fonction périodique de période  $\frac{1}{\Delta\tau}$ .

On reconnaît dans :

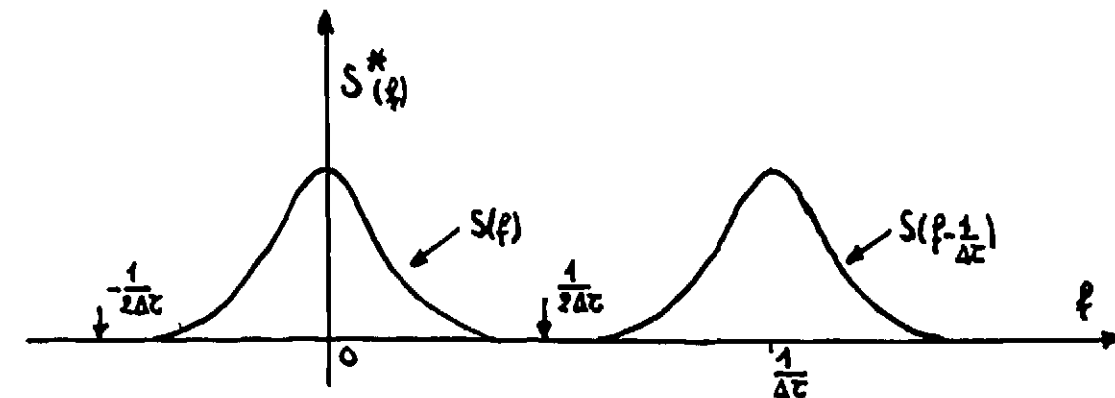
$$S_R^*(f) = \Delta\tau \sum_k C(k\Delta\tau) \cos 2\pi f(k\Delta\tau)$$

$$S_I^*(f) = -\Delta\tau \sum_k C(k\Delta\tau) \sin 2\pi f(k\Delta\tau)$$

les deux algorithmes précédents.

Si l'on ne respecte aucune condition, on trouve donc  $S^*(f)$  au lieu de  $S(f)$  avec :

$$S^*(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S(f - \frac{j}{\Delta\tau}) \quad (\text{figure 10})$$



. Si la première condition est vérifiée  $S(f)$  est complètement disjoint des différents spectres  $S(f - \frac{j}{\Delta\tau})$ , répétitions de  $S(f)$  obtenues par translation d'un multiple de  $\frac{1}{\Delta\tau}$ , que nous appellerons translatées de  $S(f)$ .

. Si de plus on se limite à la gamme  $(-\frac{1}{2\Delta\tau}, +\frac{1}{2\Delta\tau})$  on y retrouve le spectre  $S(f)$  sans aucune erreur.

Ces deux conditions à respecter qui ont été introduites pour les besoins du calcul lors du passage continu-discret, ont donc une explication très simple dans le domaine spectral.

2.2 - Application au calcul de la transformée de Fourier d'une fonction issue d'un corrélateur

De part la nature, des corrélateurs on ne peut disposer à un instant donné que de la moitié de la fonction de corrélation  $C(\tau)$

soit la moitié correspondant à  $\tau > 0$ ,

soit la moitié correspondant à  $\tau \leq 0$ .

Les deux séries à calculer doivent être séparées en deux parties :

$$S_R(f) = S_R^+(f) + S_R^-(f) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_R^+(f) = \Delta\tau \left( \frac{C(0)}{2} + C(\Delta\tau) \cos 2\pi f(\Delta\tau) + \dots \right) \\ S_R^-(f) = \Delta\tau \left( \frac{C(0)}{2} + C(-\Delta\tau) \cos 2\pi f(-\Delta\tau) + \dots \right) \end{array} \right.$$

$$S_I(f) = S_I^+(f) + S_I^-(f) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_I^+(f) = -\Delta\tau (0 + C(\Delta\tau) \sin 2\pi f(\Delta\tau) + \dots) \\ S_I^-(f) = -\Delta\tau (0 + C(-\Delta\tau) \sin 2\pi f(-\Delta\tau) + \dots) \end{array} \right.$$

Il existe cependant deux cas particuliers extrêmement fréquents en pratique qui ne nécessitent pas les opérations  $S_R^+(f) + S_R^-(f)$  et  $S_I^+(f) + S_I^-(f)$ .

- Il s'agit d'une fonction d'autocorrélation  $C(\tau) = C(-\tau)$

$$S_R^+(f) = S_R^-(f) \longrightarrow S_R(f) = 2 S_R^+(f)$$

$$S_I^+(f) = -S_I^-(f) \longrightarrow S_I(f) = 0$$

- Il s'agit d'une fonction d'intercorrélacion dont la partie négative est identiquement nulle (en identification de processus par exemple)

$$(C(\tau) = 0 \text{ si } \tau \leq 0)$$

$$S_R^-(f) = 0 \longrightarrow S_R(f) = S_R^+(f)$$

$$S_I^-(f) = 0 \longrightarrow S_I(f) = S_I^+(f)$$

Dans le cas général, il faut procéder en deux temps, calculer d'abord  $S_R^+(f)$  et  $S_I^+(f)$ , l'un des signaux étant retardé dans le corrélateur puis  $S_R^-(f)$  et  $S_I^-(f)$ , l'autre signal étant retardé.

Le transformateur de Fourier a donc deux opérations à réaliser à partir des échantillons  $C(0), C(\Delta\tau) \dots C(k\Delta\tau) \dots$  que lui délivre le corrélateur :

$$\Delta\tau \left( \frac{C(0)}{2} + C(\Delta\tau) \cos 2\pi f(\Delta\tau) \dots + C(k\Delta\tau) \cos 2\pi f(k\Delta\tau) \dots \right)$$

$$\Delta\tau \left( 0 + C(\Delta\tau) \sin 2\pi f(\Delta\tau) \dots + C(k\Delta\tau) \sin 2\pi f(k\Delta\tau) \dots \right)$$

ceci pour un certain nombre de valeur de  $f$  appartenant à la gamme  $(0, \frac{1}{2\Delta\tau})$ .



CHAPITRE III

---

ETUDE DES DIFFERENTES CAUSES D'ERREUR

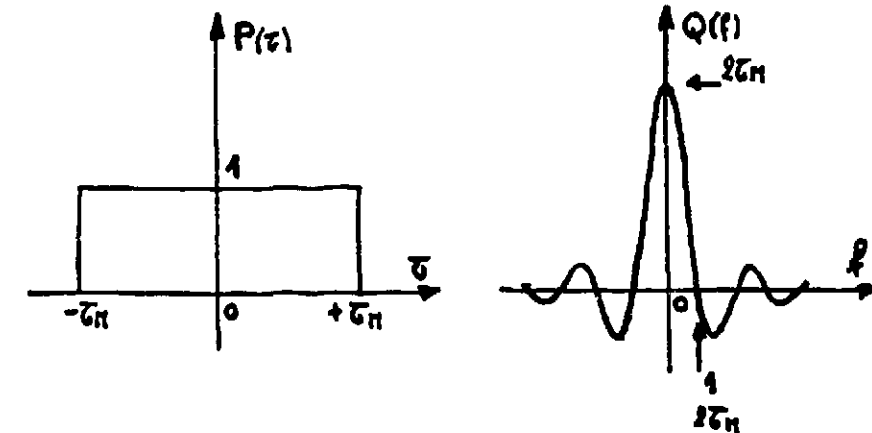
- 1 - Erreur due à une fréquence d'échantillonnage plus faible que la fréquence de Shannon.
- 2 - Erreur due au nombre limité d'échantillons de la fonction de corrélation.
- 3 - Erreur due au fait que  $C(\tau)$  n'est qu'une estimation de la fonction de corrélation.

Le fait que la fonction de corrélation à transformer soit disponible sous forme échantillonnée et non sous forme continue n'est en aucune façon préjudiciable pour le calcul de sa transformée de Fourier, à condition que cet échantillonnage respecte le théorème de Shannon.

Examinons quels sont les facteurs qui vont introduire une erreur dans ce calcul :

. Tout d'abord, le plus souvent, il est impossible de respecter rigoureusement le théorème de Shannon, parce qu'on ne peut affirmer qu'il existe une fréquence  $f_M$  au delà de laquelle la densité spectrale étudiée soit rigoureusement nulle.

. Le nombre d'échantillons de la fonction de corrélation est limité, ce qui revient à considérer implicitement qu'elle est nulle au-delà de  $\tau = \tau_M$  retard maximal, pour traduire cette troncature on pose que la fonction que l'on transforme effectivement est la fonction réelle multipliée par une fonction de pondération  $P(\tau)$  représentée sur la figure 11.



La densité spectrale trouvée est donc la densité réelle convoluée par une fenêtre spectrale  $Q(f)$ , transformée de Fourier de  $P(\tau)$  (figure 11) qui joue un rôle analogue à celui du filtre de l'analyse par filtrage.

. La fonction que l'on transforme n'est qu'une estimation de la vraie fonction de corrélation ; une fluctuation de cette fonction entraîne une fluctuation de la fonction densité spectrale.

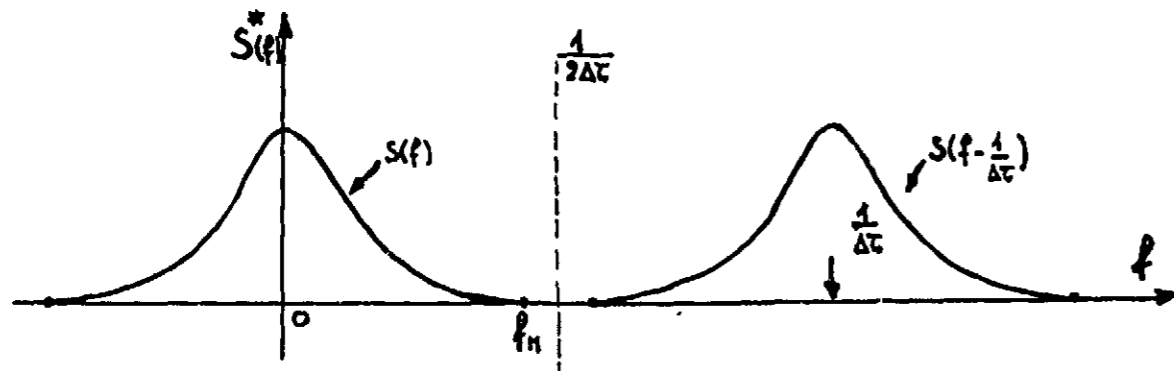
. Les éléments électroniques qui effectuent le calcul de transformée de Fourier opèrent avec une précision limitée.

1 - ERREUR DUE A UNE FREQUENCE D'ECHANTILLONNAGE PLUS FAIBLE QUE LA FREQUENCE DE SHANNON -

Du fait de l'échantillonnage la densité spectrale obtenue au moyen de l'algorithme numérique est :

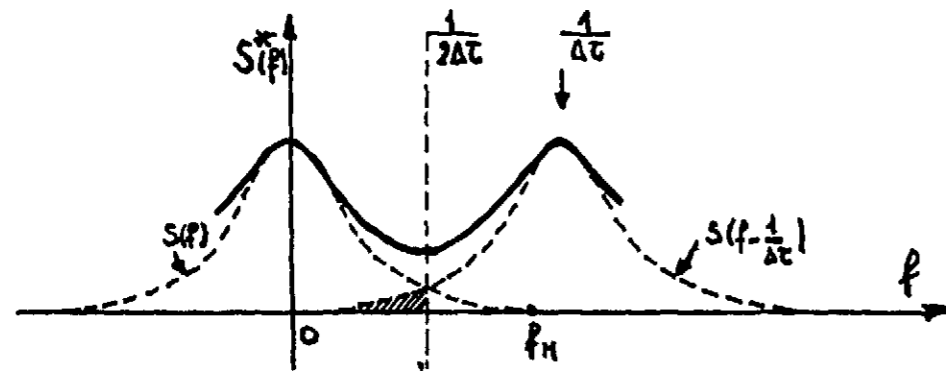
$$S^*(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{j}{\Delta\tau}\right), \text{ transformée de Fourier de } C^*(\tau).$$

1.1 - Si le théorème de Shannon est respecté  $\frac{1}{2\Delta\tau} > f_M$  (figure 12)



Dans la gamme  $\left(-\frac{1}{2\Delta\tau}, \frac{1}{2\Delta\tau}\right)$  on retrouve le spectre exact  $S(f)$ .

1.2 - Si le théorème de Shannon n'est pas respecté  $\frac{1}{2\Delta\tau} < f_M$  (figure 13)



Il n'y a dans ce cas aucun moyen d'obtenir la densité spectrale exacte  $S(f)$  même si l'on se limite à la gamme  $\left(-\frac{1}{2\Delta\tau}, \frac{1}{2\Delta\tau}\right)$  on obtiendra  $S(f)$  auquel se sera ajoutée la partie hachurée provenant du spectre translaté.

Par raison de symétrie cette partie hachurée est égale à la queue du spectre cherché  $S(f)$ , située au-delà de la fréquence de Nyquist  $f_N = \frac{1}{2\Delta\tau}$ , qui aurait été rabattue autour de  $f_N$  vers les basses fréquences.

Suivant la précision que l'on désire, on se fixera un certain pourcentage de la valeur maximale de  $S(f)$ ; et l'on s'interdira de faire empiéter la fréquence de Nyquist sur  $S(f)$  d'une valeur supérieure, il faudra s'assurer en outre que l'amplitude de  $S(f)$  décroît constamment au-delà de la fréquence de Nyquist.

Si l'on ne peut éviter cette erreur, on peut du moins lui imposer une borne supérieure.

2 - ERREUR DUE AU NOMBRE LIMITE D'ECHANTILLONS DE LA FONCTION DE CORRELATION -

2.1 - Translation et lissage du spectre

Soit une fonction de corrélation définie dans l'intervalle  $(-n\Delta\tau, +n\Delta\tau)$  par  $2n+1$  échantillons, elle est issue d'un corrélateur à  $N = n+1$  points, la représentation échantillonnée dont on dispose est :

$$C_n^*(\tau) = C(\tau) \Delta\tau \sum_{i=-n}^{+n} \delta(\tau - i\Delta\tau)$$

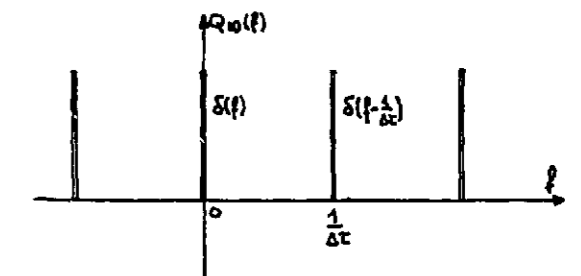
Rappelons que dans le cas où  $n$  est infini :

$$C^*(\tau) = C(\tau) \Delta\tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - i\Delta\tau) \quad C^*(\tau) = C(\tau) \cdot P_\infty(\tau)$$

$$P_\infty(\tau) = \Delta\tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - i\Delta\tau)$$

Le spectre trouvé est le spectre cherché  $S(f)$ , convolué par la fenêtre spectrale  $Q_\infty(f)$  transformée de Fourier de  $P_\infty(\tau)$ .

$$Q_\infty(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{j}{\Delta\tau}\right) \quad \text{(figure 14)}$$



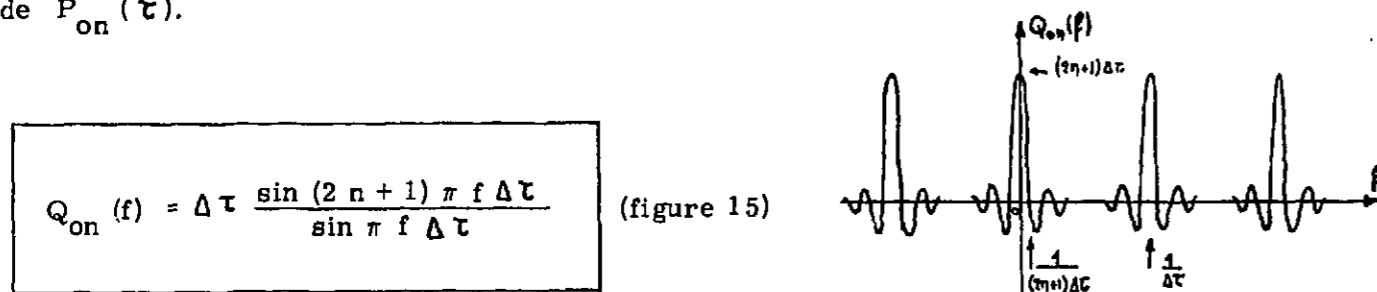
le spectre trouvé est donc  $S(f)$ , lui-même auquel s'ajoutent toutes les translatées  $S\left(f - \frac{j}{\Delta\tau}\right)$ ,  $j$  prenant toutes les valeurs entières de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Dans notre cas où  $n$  est fini :

$$C_n^*(\tau) = C(\tau) \Delta\tau \sum_{i=-n}^{+n} \delta(\tau - i \Delta\tau) \quad C_n^*(\tau) = C(\tau) \cdot P_{on}(\tau)$$

$$P_{on}(\tau) = \Delta\tau \sum_{i=-n}^{+n} \delta(\tau - i \Delta\tau)$$

le spectre trouvé est  $S(f)$ , convolué par la fenêtre spectrale  $Q_{on}(f)$  transformée de Fourier de  $P_{on}(\tau)$ .



fonction périodique de période  $\frac{1}{\Delta\tau}$  nulle pour  $f = \frac{k}{(2n+1)\Delta\tau}$ .

Cette fenêtre étant périodique donne comme dans le cas  $n$  infini une translation du spectre de  $\frac{1}{\Delta\tau}$ , mais de plus chacun des éléments de  $Q_{on}(f)$  n'est pas une pure raie de Dirac, la convolution qu'il opère sur  $S(f)$  produit un lissage, en particulier ses lobes latéraux très prononcés engendrent fréquemment des oscillations parasites.

On peut agir sur l'allure de la fenêtre spectrale et par la même sur la déformation qu'elle apporte à  $S(f)$  en multipliant chaque échantillon de  $C(\tau)$  par la valeur correspondante d'une fonction de pondérations par exemple le "hanning" utilise :

$$P_2(\tau) = 0,5 \left( 1 + \cos \frac{\pi \tau}{(n + \frac{1}{2}) \Delta\tau} \right)$$

ce qui donne la fenêtre spectrale :

$$Q_{2n}(f) = 0,5 Q_{on}(f) + 0,25 Q_{on}\left(f - \frac{1}{(2n+1)\Delta\tau}\right) + 0,25 Q_{on}\left(f + \frac{1}{(2n+1)\Delta\tau}\right)$$

qui présente par rapport à  $Q_{on}(f)$  l'avantage de posséder des lobes latéraux beaucoup plus faibles.

## 2.2 - Fenêtres numériques et analogiques

Considérons la fenêtre spectrale "numérique" d'équation :

$$Q_{on}(f) = \Delta\tau \frac{\sin(2n+1)\pi f \Delta\tau}{\sin \pi f \Delta\tau}$$

La figure 16 donne l'allure de  $Q_{on}(f)$  pour  $n = 10$  en pointillé et  $n = 100$  en trait plein, on voit le peu d'effet apporté par une telle variation de  $n$ .

Supposons maintenant que l'on effectue le calcul de transformation de Fourier à partir d'une fonction de corrélation  $C(\tau)$  analogique définie jusqu'à  $\tau = \tau_M$ .

On applique en somme la transformation de Fourier à :

$$C(\tau) \cdot P_o(\tau) \quad \text{avec } P_o(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\tau| < \tau_M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

le spectre trouvé est  $S(f)$  convolué par la fenêtre spectrale "analogique"  $Q_o(f)$ , transformée de Fourier de  $P_o(\tau)$  :

$$Q_o(f) = 2\tau_M \frac{\sin 2\pi f \tau_M}{2\pi f \tau_M}$$

On remarque que si l'on choisit  $n$  et  $\Delta\tau$  pour la fenêtre numérique d'une part, et  $\tau_M$  pour la fenêtre analogique d'autre part, liés par :

$$(2n+1)\Delta\tau = 2\tau_M$$

il y a superposition exacte de  $Q_{on}(f)$  et  $Q_o(f)$ , du moins pour  $n = 100$ , pour  $n = 10$   $Q_{on}(f)$  a des lobes latéraux très légèrement plus accentués.

La fenêtre spectrale  $Q_{on}(f)$  tend vers  $Q_o(f)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, en effet :

$$Q_{on}(f) = \Delta\tau \frac{\sin(2n+1)\pi f \Delta\tau}{\sin \left[ \frac{(2n+1)\pi f \Delta\tau}{(2n+1)} \right]}$$

si  $n \rightarrow \infty$  et  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , la quantité  $(2n+1)\Delta\tau$  restant constante  $Q_{on}(f)$  se comporte comme  $(2n+1)\Delta\tau \frac{\sin(2n+1)\pi f \Delta\tau}{(2n+1)\pi f \Delta\tau}$  c'est-à-dire si on fait la transposition en notations analogiques :

$$2\tau_M \frac{\sin 2\pi f \tau_M}{2\pi f \tau_M} \quad \text{ce qui correspond bien à } Q_o(f).$$

2.3 - Différentes fenêtres

Pour toutes les valeurs usuelles de n , on peut parfaitement assimiler la fenêtre numérique qui convolue le spectre réel à sa fenêtre analogique asymptote, nous allons examiner les diverses fenêtres analogiques que l'on peut obtenir.

En dehors de :

$$P_0(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\tau| < \tau_M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \iff Q_0(f) = 2 \tau_M \frac{\sin 2 \pi f \tau_M}{2 \pi f \tau_M}$$

Les principales paires de Fourier pondération sur C(\tau) \iff fenêtre spectrale sont :

$$- P_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{\tau}{\tau_M} \right| & \text{si } |\tau| < \tau_M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \iff Q_1(f) = \tau_M \left( \frac{\sin \pi f \tau_M}{\pi f \tau_M} \right)^2$$

$$- P_2(\tau) = \begin{cases} 0,5 \left( 1 + \cos \frac{\pi \tau}{\tau_M} \right) & \text{si } |\tau| < \tau_M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \iff Q_2(f) = 0,5 Q_0(f) + 0,25 Q_0\left(f + \frac{1}{2 \tau_M}\right) + 0,25 Q_0\left(f - \frac{1}{2 \tau_M}\right)$$

"hanning"

$$- P_3(\tau) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi \tau}{\tau_M} & \text{si } |\tau| < \tau_M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \iff Q_3(f) = 0,54 Q_0(f) + 0,23 Q_0\left(f + \frac{1}{2 \tau_M}\right) + 0,23 Q_0\left(f - \frac{1}{2 \tau_M}\right)$$

"hamming"

Ces fenêtres spectrales Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub> offrent par rapport à Q<sub>0</sub>(f) l'avantage de ne présenter pratiquement plus de lobes latéraux gênants, par contre elles sont en moyenne deux fois plus écrasées que Q<sub>0</sub>(f), le pouvoir séparateur d'une analyse spectrale avec pondération est à peu près deux fois moindre que celui d'une analyse sous pondération effectuée dans les mêmes conditions.

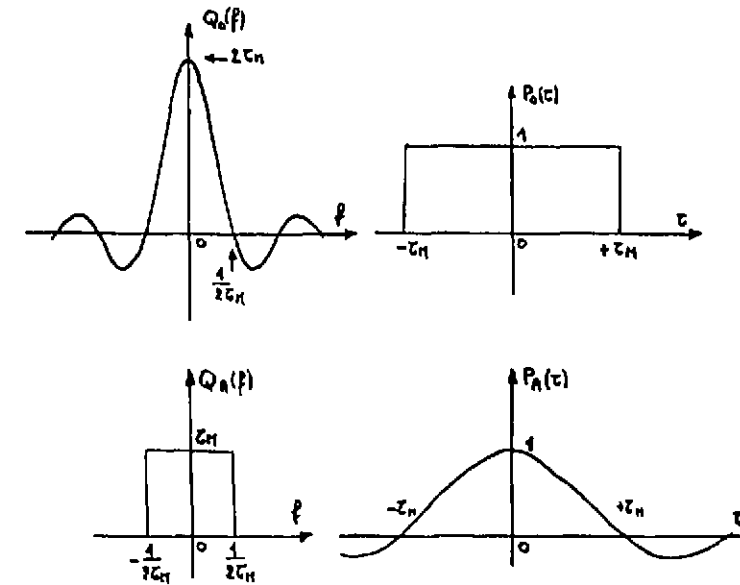
Nous proposons une fenêtre originale Q<sub>s</sub>(f) qui essaie de concilier ces deux exigences contradictoires : réduire les lobes latéraux d'une part et avoir peu d'écrasement d'autre part.

L'idée de base est de réduire les lobes latéraux de la fenêtre Q<sub>0</sub>(f) en la convoluant avec une fenêtre auxiliaire rectangulaire Q<sub>A</sub>(f) dont la largeur est exactement égale à la période  $\frac{1}{\tau_M}$  de ces lobes latéraux.

La figure 17 représente la paire de Fourier P<sub>0</sub>(\tau) Q<sub>0</sub>(f).

La figure 18 la paire P<sub>A</sub>(\tau) Q<sub>A</sub>(f).

On moyennera ainsi les oscillations latérales de Q<sub>0</sub>(f) sur une période, soit Q<sub>s</sub>(f) la nouvelle fenêtre ainsi obtenue



$$Q_s(f) = Q_0(f) * Q_A(f)$$

dans le domaine temporel la pondération à appliquer pour obtenir ce résultat est :

$$P_s(\tau) = P_0(\tau) \cdot P_A(\tau)$$

$$P_s(\tau) = \begin{cases} \frac{\sin \pi \frac{\tau}{\tau_M}}{\pi \frac{\tau}{\tau_M}} & \text{si } |\tau| < \tau_M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La figure 16 donne l'allure de Q<sub>0</sub>(f), Q<sub>2</sub>(f), Q<sub>s</sub>(f).

2.4 - Exemple de ce type d'erreur sur un spectre de Lorentz

La figure 19 donne un exemple d'erreur due au nombre limité d'échantillons sur la fonction de corrélation.

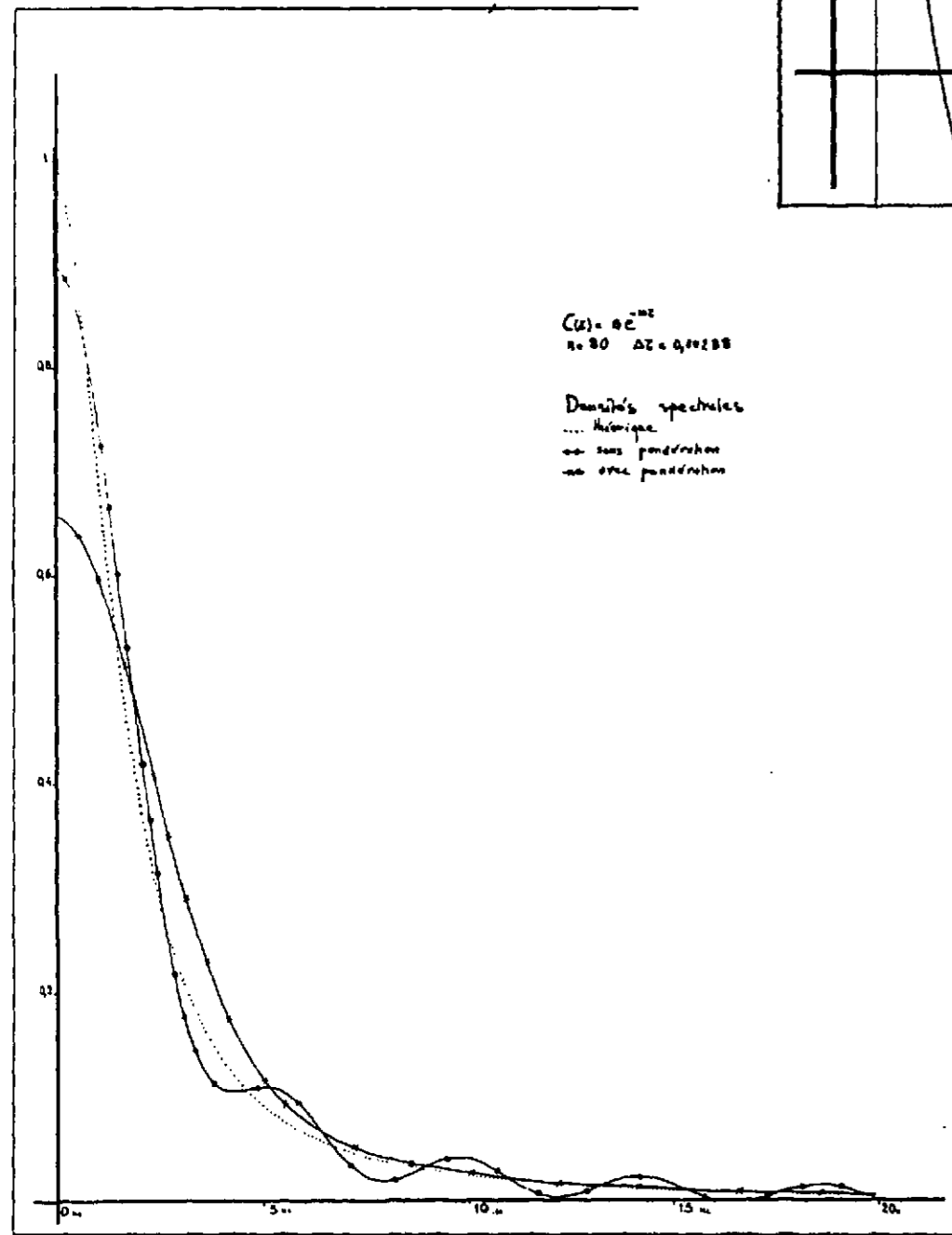
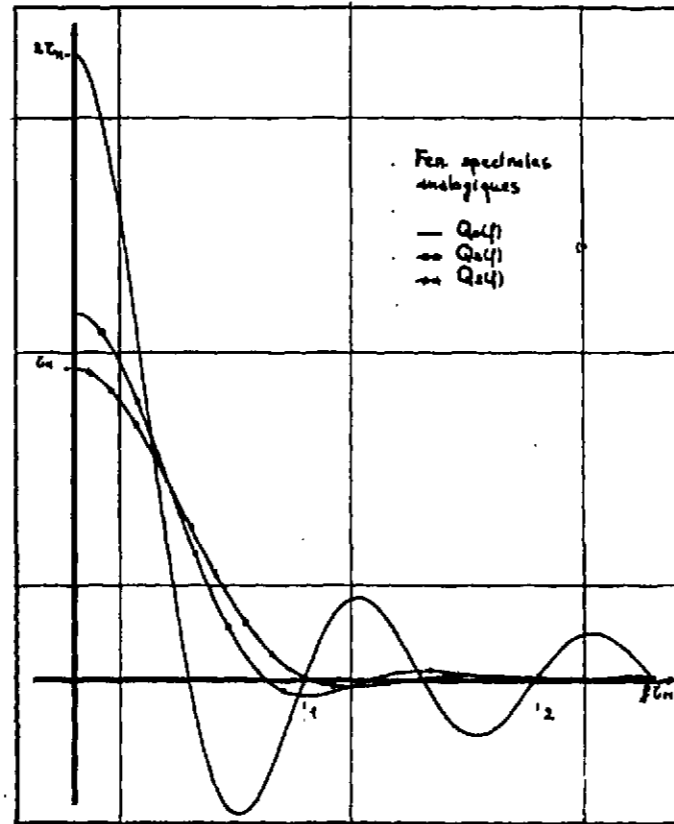
Il s'agit de la fonction d'auto-corrélation : C(\tau) = 5 e<sup>-10\tau</sup> la densité spectrale correspondante est : S(f) =  $\frac{100}{100 + (2 \pi f)^2}$

Ont été tracées, la densité spectrale théorique et les densités spectrales telles qu'on les obtient par transformation de Fourier de C(\tau) suivant que l'on utilise ou non une pondération.

Nombre d'échantillons de C(\tau) sur la partie \tau > 0 N = n + 1 = 81 .

Retard incrémental \Delta\tau = 0,00288 .

Valeur volontairement trop faible qui donne sur C(\tau) une troncature de 10 %.



$$e^{-10 \cdot 80 \cdot 0,00288} = e^{-2,3} = 0,1$$

La courbe obtenue sans pondération donne une erreur à l'origine de 0.1 (il s'agit là d'une propriété de l'exponentielle) cette erreur décroît ensuite, en amplitude, lorsque la fréquence croît en présentant des oscillations de période  $\frac{1}{\tau} = 4,35 \text{ Hz}$  ( $\tau_M$  retard maximal =  $n \Delta \tau$ ), ces oscillations sont dues aux lobes latéraux de la fenêtre spectrale.

La courbe obtenue avec pondération ne présente pas d'oscillations mais en revanche une erreur à l'origine plus importante (0.34) en effet la fenêtre spectrale avec pondération ne présente pratiquement plus de lobes latéraux, mais son lobe central est beaucoup plus écrasé.

Si l'on accroît la valeur de  $\Delta \tau$ , on peut réduire considérablement l'amplitude de l'erreur, par exemple sa valeur à l'origine, sans pondération, devient 0,0067 avec  $\Delta \tau = 0,00625$  et 0,00033 avec  $\Delta \tau = 0,01$ .

La figure 20 est également relative à l'exemple  $C(\tau) = 5 e^{-\frac{10\tau}{5}} \quad S(f) = \frac{100}{100 + (2\pi f)^2}$

La densité spectrale  $S(f)$  a été évaluée par transformation de Fourier avec différentes valeurs de  $n$  et de  $\Delta \tau$ .

- |     |          |                         |            |                    |                       |
|-----|----------|-------------------------|------------|--------------------|-----------------------|
| (1) | $n = 80$ | $\Delta \tau = 0,00625$ | troncature | $e^{-5} = 0,0067$  | $f_N = 80 \text{ Hz}$ |
| (2) | $n = 50$ | $\Delta \tau = 0,01$    | "          | $e^{-5} = 0,0067$  | $f_N = 50 \text{ Hz}$ |
| (3) | $n = 80$ | $\Delta \tau = 0,01$    | "          | $e^{-8} = 0,00033$ | $f_N = 50 \text{ Hz}$ |

Dans les cas (1) et (2) le retard maximal est le même dans les cas (2) et (3) le retard incrémental est le même.

On voit apparaître sur les courbes d'erreur qui ont été tracées (densité spectrale trouvée - densité spectrale théorique) deux phénomènes bien distincts :

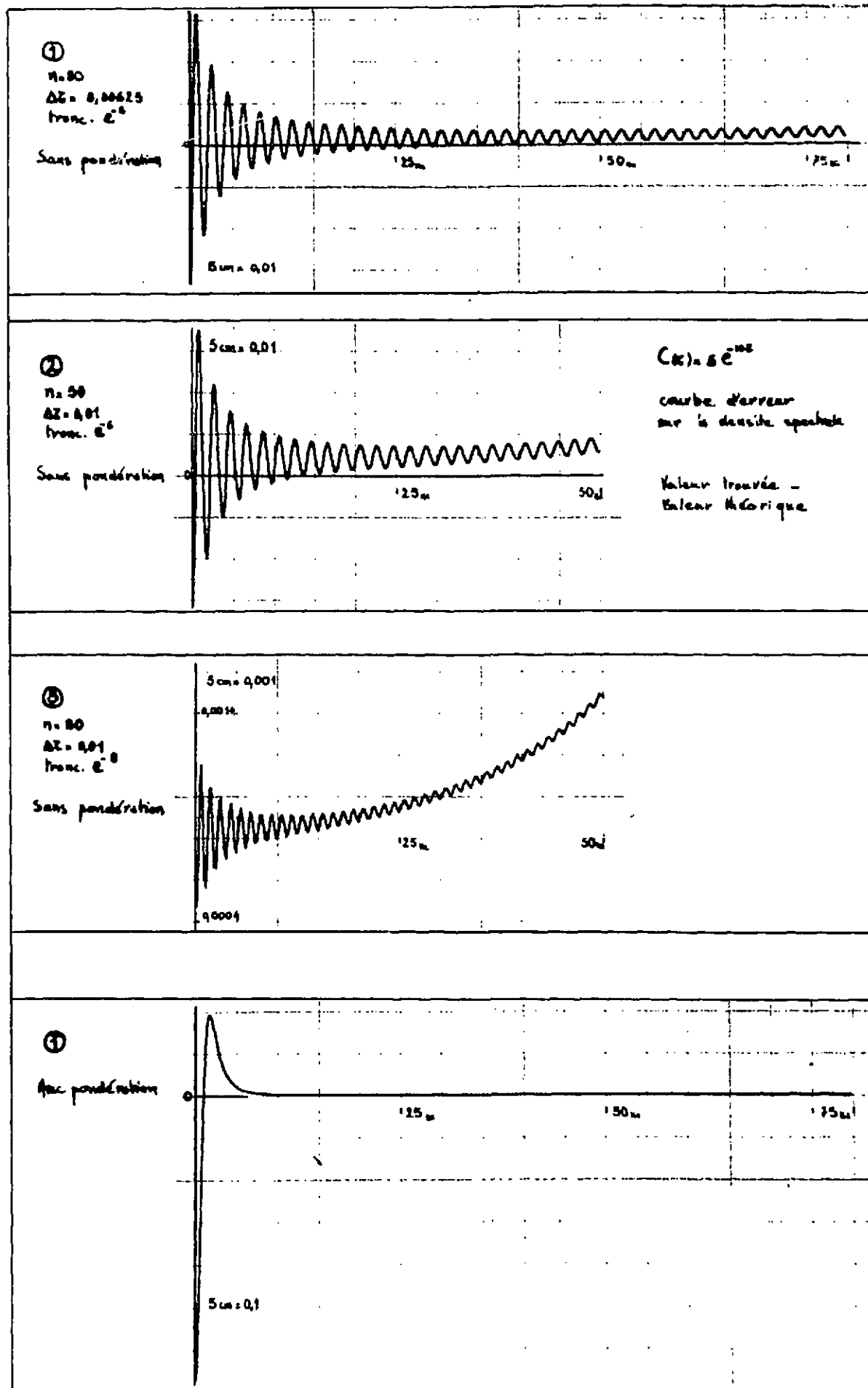
- Les oscillations dues à la troncature de la fonction de corrélation identiques dans les cas (1) et (2),

L'amplitude crête à crête de la première demi-période est le double de la troncature :

$$0,013 \text{ pour (1) et (2)}$$

$$0,00067 \text{ pour (3)}$$

- L'erreur moyenne de part et d'autre de laquelle se situent les oscillations, due au chevauchement du spectre translaté voisin identique dans les cas (2) et (3),



La valeur de cette erreur à la fréquence de Nyquist est :

- 0,0007 pour (1)
- 0,0015 pour (2) et (3)

La dernière courbe représente l'erreur dans le cas (1) avec pondération sur la fonction de corrélation, les courbes sont semblables dans les cas (2) et (3).

- L'amplitude crête à crête au voisinage de l'origine est liée à la troncature sa valeur est :

- 0,175 pour (1) et (2)
- 0,08 pour (3)

(2 fois plus faible en (3) qu'en (1) et (2) alors que sans pondération elle était 20 fois plus faible).

- L'erreur moyenne est la même qu'en l'absence de pondération sa valeur à la fréquence de Nyquist est :

- 0,0007 pour (1)
- 0,0015 pour (2) et (3)

2.5 - Autres algorithmes

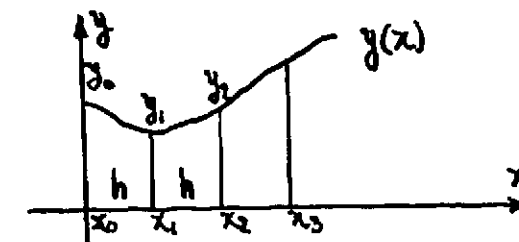
Nous avons vu que, pour évaluer la transformée de Fourier d'une fonction d'auto-corrélation, l'algorithme que nous avons été amenés à employer, est :

$$S(f) = 2 \Delta \tau \left( \frac{C(0)}{2} + C(\Delta \tau) \cos 2 \pi f (\Delta \tau) + C(2 \Delta \tau) \cos 2 \pi f (2 \Delta \tau) \dots \right)$$

Or, il s'agit là de l'algorithme de la méthode d'intégration dite des trapèzes, si l'on considère maintenant le problème sous l'angle de l'analyse numérique, il s'agit au fond d'effectuer de façon numérique l'intégration de la fonction  $C(\tau) \cos 2 \pi f \tau$  connue par ses échantillons.

On est alors tenté d'utiliser une méthode plus élaborée que la méthode des trapèzes qui est une méthode d'ordre 1 il existe également des méthodes d'ordre 2, 3, 4 qui procèdent en groupant les intervalles 2 par 2, 3 par 3, ....

Donnons leur définition et l'erreur commise avec les notation de la figure 21 :



Donnons également l'algorithme correspondant à l'application de chacune de ces méthodes à la transformation de Fourier d'une fonction d'autocorrélation.

Notons  $C_{31}$  la quantité  $C(31 \Delta \tau) \cos 2 \pi f(31 \Delta \tau)$  et supposons que l'on dispose d'un corrélateur à  $N = 81$  points.

- Ordre 1 (trapèzes)  $\int_{x_0}^{x_1} y dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$  erreur  $-\frac{h^3}{12} y''(\xi)$

$$S(f) = 2 \cdot \frac{\Delta \tau}{2} (C_0 + 2 Cc_1 + 2 Cc_2 + 2 Cc_3 \dots + 2 Cc_{79} + Cc_{80})$$

- Ordre 2 (Simpson)  $\int_{x_0}^{x_2} y dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + y_2)$  erreur  $-\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi)$

$$S(f) = 2 \cdot \frac{\Delta \tau}{3} (C_0 + 4 Cc_1 + 2 Cc_2 + 4 Cc_3 \dots + 2 Cc_{78} + 4 Cc_{79} + Cc_{80})$$

- Ordre 3  $\int_{x_0}^{x_3} y dx \approx \frac{3h}{8} (y_0 + 3 y_1 + 3 y_2 + y_3)$  erreur  $-\frac{3}{80} h^5 y^{(4)}(\xi)$

Méthode peu intéressante.

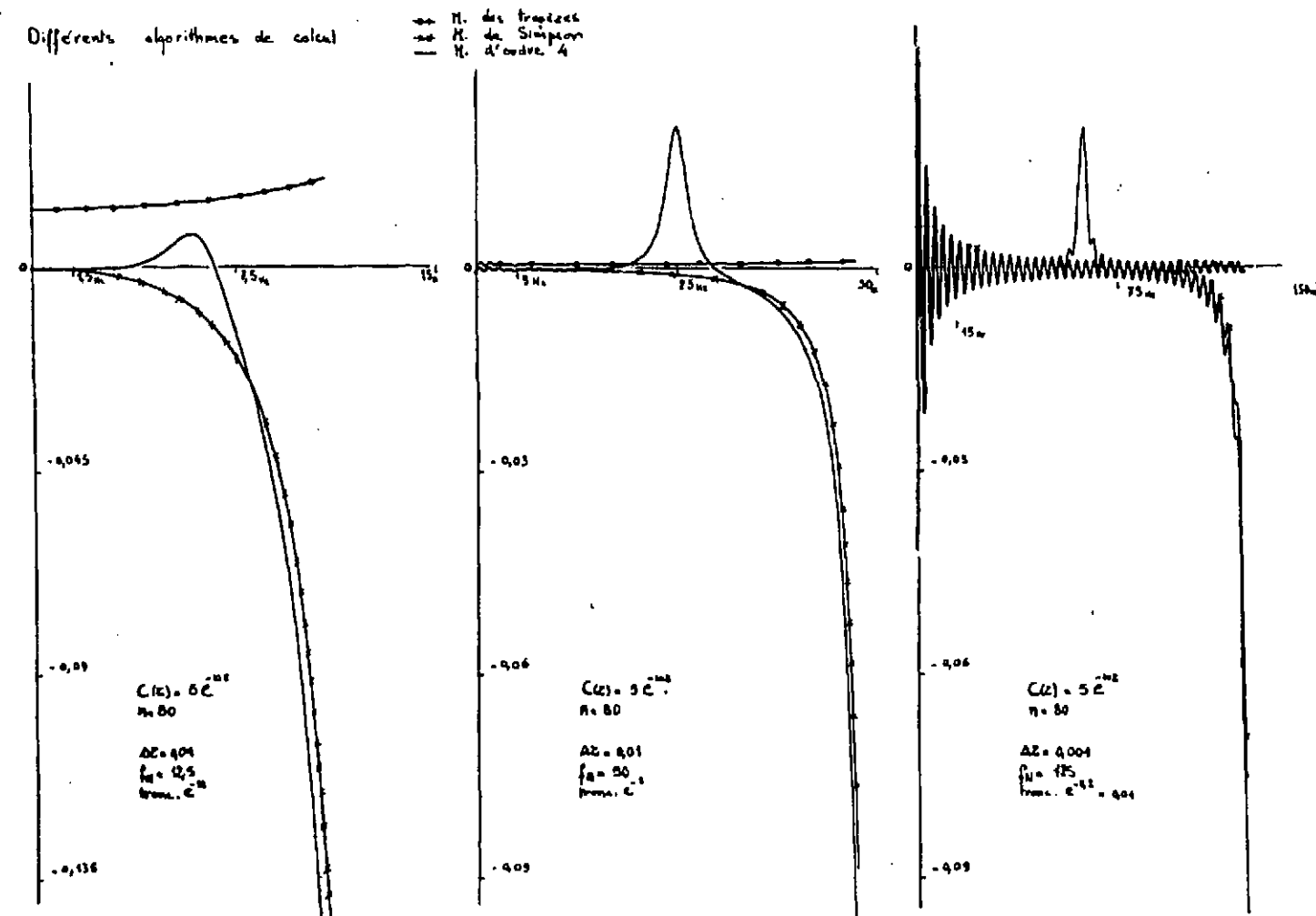
- Ordre 4  $\int_{x_0}^{x_4} y dx \approx \frac{4h}{90} (7 y_0 + 32 y_1 + 12 y_2 + 32 y_3 + 7 y_4)$  erreur  $-\frac{8h^7}{945} y^{(6)}(\xi)$

$$S(f) = 2 \cdot \frac{4 \Delta \tau}{90} (7 C_0 + 32 Cc_1 + 12 Cc_2 + 32 Cc_3 + 14 Cc_4 + 32 Cc_5 \dots + 14 Cc_{76} + 32 Cc_{77} + 12 Cc_{78} + 32 Cc_{79} + 7 Cc_{80})$$

Il n'est d'ailleurs pas impératif de respecter la pondération sur le dernier terme puisque de toute façon il faudrait disposer d'une infinité d'échantillons.

La figure 22 représente les courbes d'erreur relatives aux trois méthodes suivantes : trapèzes, Simpson, ordre 4.

L'exemple choisi est  $C(\tau) = 5 e^{-10\tau}$  avec  $n = 80$ , trois valeurs différentes du retard incrémental sont considérées :  $\Delta \tau = 0,04 ; 0,01 ; 0,004$ .



La première valeur est sensiblement trop forte, et il y a chevauchement du spectre translaté voisin, la troisième est trop faible, la fonction de corrélation est tronquée d'une façon trop importante ce qui engendre des oscillations.

On voit que la méthode de Simpson et la méthode d'ordre 4 ont le grave inconvénient de donner une erreur négative très importante au voisinage de la fréquence de Nyquist (jusqu'à 30 % sur cet exemple) ; cela est dû à la pondération plus forte des échantillons de rang impair, de plus, la méthode d'ordre 4 donne une erreur positive localisée au milieu de la gamme ( $0, f_N$ ) elle atteint ici 2 %.

On ne pourrait songer à utiliser une méthode d'ordre plus élevé que la méthode des trapèzes que si l'on se limitait au calcul d'une faible fraction de la gamme ( $0, f_N$ ), fraction de l'ordre du quart par exemple, ceci réduirait considérablement les performances du dispositif.

### 3 - ERREUR DUE AU FAIT QUE $C(\tau)$ N'EST QU'UNE ESTIMATION DE LA FONCTION DE CORRELATION -

En fait le corrélateur n'évalue la fonction de corrélation que sur une tranche finie de signal, la fonction  $C(\tau)$  à laquelle on va appliquer la transformation de Fourier, est sus-



ceptible de fluctuer au cours du temps si le signal étudié n'est pas stationnaire sur une longue durée.

D'autre part, l'estimation elle-même  $C(\tau)$  n'est disponible qu'avec une certaine précision.

- Elle est calculée par des éléments électroniques d'une définition limitée, on peut admettre comme modèle mathématique de l'erreur qui en résulte que la valeur relative de celle-ci est uniformément répartie dans une certaine bande de valeurs centrée autour de 0.

- Le corrélateur donne en sortie un certain bruit de fond, schématisons ce phénomène par une erreur uniformément répartie en valeur absolue dans une certaine bande de valeurs.

L'exemple choisi est  $C(\tau) = 5 e^{-10\tau}$  avec  $n = 80$  et  $\Delta\tau = 0,00625$ . Apportons aux échantillons de  $C(\tau)$  une perturbation  $\Delta C$  et examinons qu'elle en est la répercussion sur la transformée de Fourier  $S(f)$ , on utilise une séquence pseudo-aléatoire de nombres  $Y_k$  uniformément répartis entre 0 et 1.

Les figures 23 et 24 représentent  $C(\tau)$  et  $S(f)$  avant et après application de la perturbation  $\Delta C$ ; deux cas sont considérés :

- La valeur relative de  $\Delta C$  est uniformément répartie (figure 23)

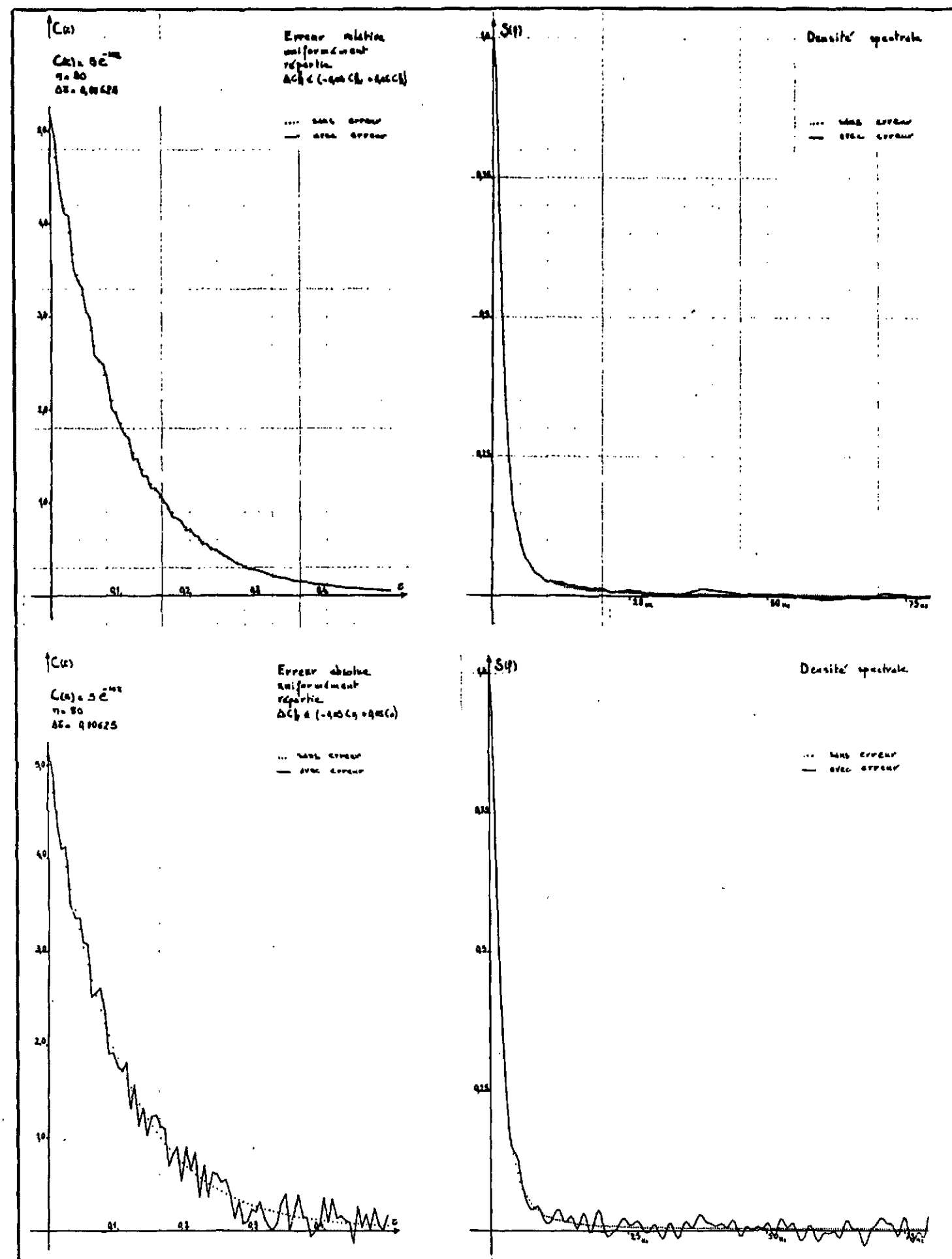
$$\Delta C_k = C(k \Delta\tau) \frac{Y_k - 0,5}{10}$$

- La valeur absolue de  $\Delta C$  est uniformément répartie (figure 24)

$$\Delta C_k = C(0) \frac{Y_k - 0,5}{10}$$

L'erreur sur l'une et l'autre des deux fonctions  $C(\tau)$  et  $S(f)$  peut être caractérisée par sa valeur moyenne et son écart quadratique moyen  $\sigma$ , chacune de ces deux quantités étant rapportée à la valeur à l'origine de la fonction.

Deux réalisations du hasard  $R_1$  et  $R_2$  ont été appliquées ; les figures 23 et 24 correspondent à la première.



	Erreur relative uniformément répartie		Erreur absolue uniformément répartie	
	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
C (τ)	m 0,00068	0,00046	0 0021	0,0023
	σ 0,0092	0,011	0,029	0,030
S (f)	m 0,0012	0,00068	0 0013	0,00068
	σ 0,0037	0,0043	0,011	0,011

Donnons à titre de comparaison l'erreur préexistante sur S (f) avant l'introduction de la perturbation ΔC, elle est due principalement au nombre limité d'échantillons.

m 0,00040  
σ 0,00083

Nous voyons que l'erreur absolue uniformément répartie a beaucoup plus d'effet que l'erreur relative, l'écart σ sur S (f) est à peu près trois fois plus important.

D'autre part l'écart σ sur S (f) est de l'ordre du tiers de celui sur C (τ) dans un cas comme dans l'autre.

Ces résultats sont très sensibles aux choix du retard incrémental Δτ, si celui-ci avait été choisi plus important, davantage d'échantillons de C (τ) se seraient trouvés vers les niveaux faibles et la répercussion sur S (f) eut été plus importante.

CHAPITRE IV

MODE D'UTILISATION. PERFORMANCES DU SYSTEME  
D'ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

- 1 - Critère de choix du retard incrémental.
- 2 - Performances du système d'analyse.
- 3 - Analyse d'un spectre étendu, invariance du pouvoir séparateur sur la gamme de fréquence étudiée.
- 4 - Extension du théorème de Shannon, sous-échantillonnage.
- 5 - Exemple d'application.

Avec la méthode d'analyse spectrale par corrélation chaque fois que l'on calcule une valeur de densité spectrale à une certaine fréquence  $f_0$ , tout se passe comme si l'on disposait à cette fréquence là la fenêtre spectrale  $Q(f)$  et que l'on calcule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) Q(f_0 - f) df$$

alors que le résultat cherché est  $S(f_0)$ .

Il en résulte un lissage du spectre, il faut toujours chercher à réduire au maximum ce lissage en s'efforçant d'avoir une fenêtre spectrale la plus étroite possible par rapport au spectre étudié.

Les exemples cités dans cette partie permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Pour avoir une analyse fine, il faut restreindre au maximum la gamme de fréquence étudiée  $(0, f_N)$ , puisqu'il y a un rapport constant entre la largeur de la fenêtre et cette gamme, il faut que la fenêtre spectrale soit étroite vis-à-vis du spectre étudié, si c'est le contraire qui se produit le système ne peut plus suivre et la courbe obtenue traduit l'allure de la fenêtre plutôt que la courbe cherchée.

- Si on étudie un spectre comportant des hautes et des basses fréquences, ce sont les hautes fréquences qui imposent l'étendue de fréquence à étudier  $(0, f_N)$ , et par là, la largeur de la fenêtre spectrale, mais cette fenêtre étant invariante lorsqu'on la déplace, on a partout la même finesse d'analyse, que ce soit du côté des hautes ou des basses fréquences.

- Enfin, si l'on étudie un spectre entièrement localisé autour d'une fréquence élevée, on peut grâce au sous-échantillonnage restreindre la gamme de fréquence étudiée autour de la zone intéressante au lieu de lui donner pour origine la fréquence 0, ceci toujours dans le but d'accroître la finesse d'analyse.

#### 1 - CRITERE DE CHOIX DU RETARD INCREMENTAL -

Il s'agit de trouver un critère qui permette d'adapter à la densité spectrale que l'on étudie la valeur optimale du retard incrémental  $\Delta\tau$  (ou de la fréquence de Nyquist  $f_N = \frac{1}{\Delta\tau}$ ).

Considérons l'exemple suivant :

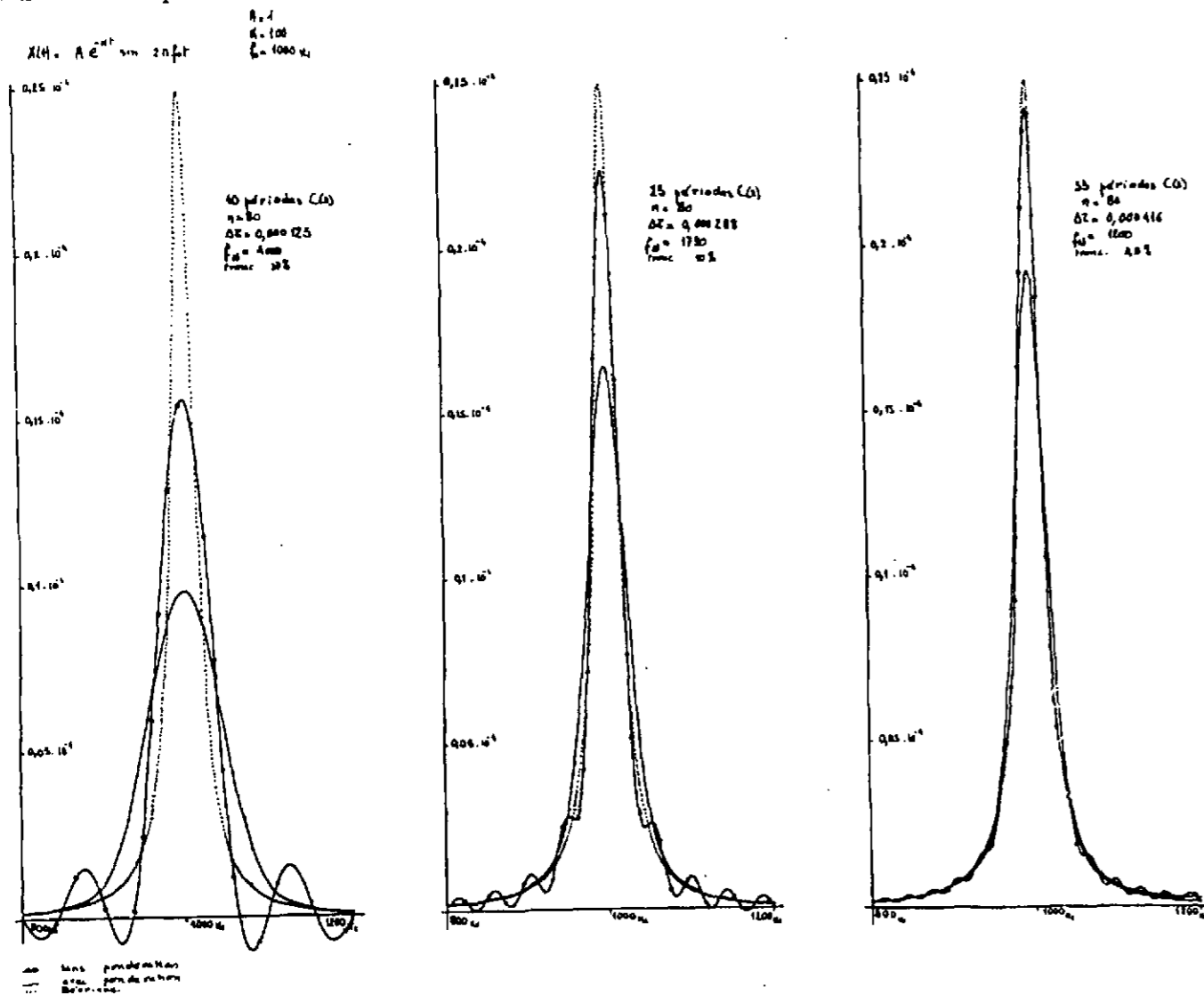
Soit le signal d'énergie finie  $X(t) = A e^{-\alpha t} \sin 2\pi f_0 t$  avec  $\alpha = 100$  et  $f_0 = 1\,000$ , sa densité spectrale se présente comme un pic localisé autour de 1 kHz, sa fonction de corrélation :

$$C_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{4} \frac{\omega_0}{\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)} e^{-\alpha \tau} (\omega_0 \cos \omega_0 \tau + \alpha \sin \omega_0 \tau) \quad \text{avec } \omega_0 = 2\pi f_0$$

se présente comme une fonction cosinus amortie.

On peut donc se demander qu'elle est la meilleure façon de répartir les échantillons dont on dispose, les resserrer sur quelques périodes pour décrire de façon précise l'allure de la courbe ou au contraire les écarter de façon à prendre en compte la plus grande partie possible de celle-ci.

La figure 25 représente la densité spectrale théorique et celles obtenues par transformation de Fourier de  $C(\tau)$ , avec ou sans pondération, trois cas ont été envisagés suivant le nombre de périodes de  $C(\tau)$  sur lesquelles sont répartis les échantillons :



Nombre périodes $C(\tau)$	10	23	33
Fréquence de Nyquist	4 000 Hz	1 730 Hz	1 200 Hz
Troncature $C(\tau)$	37 %	10 %	3.5 %

On voit que le résultat s'améliore à mesure que l'on étale les échantillons, le sommet de la courbe obtenue se rapproche du sommet théorique et, ceci pour la courbe sans pondération, les oscillations parasites disparaissent ; d'ailleurs on remarque que, pour cette courbe, l'erreur au sommet en valeur relative est égale à la troncature.

La meilleure utilisation de l'ensemble corrélation-transformation de Fourier consiste donc à donner la valeur la plus élevée possible à  $\Delta\tau$ , c'est-à-dire à abaisser  $f_N$  au maximum jusqu'à ce que l'empiètement de  $f_N$  sur le spectre atteigne la valeur maximale que l'on s'est imposée.

Ce résultat s'interprète de la façon suivante : on peut dire que la fenêtre spectrale a une largeur équivalente de  $\frac{1}{2\tau_M}$ , on peut donc juxtaposer  $n$  d'entre elles dans la gamme étudiée  $(0, f_N)$ , c'est-à-dire un nombre déterminé indépendant de l'opérateur, en restreignant la gamme étudiée on obtient donc une meilleure finesse d'analyse.

## 2 - PERFORMANCES DU SYSTEME D'ANALYSE -

L'utilisation optimale du système d'analyse spectrale étant définie, cherchons à évaluer les performances que l'on peut en attendre.

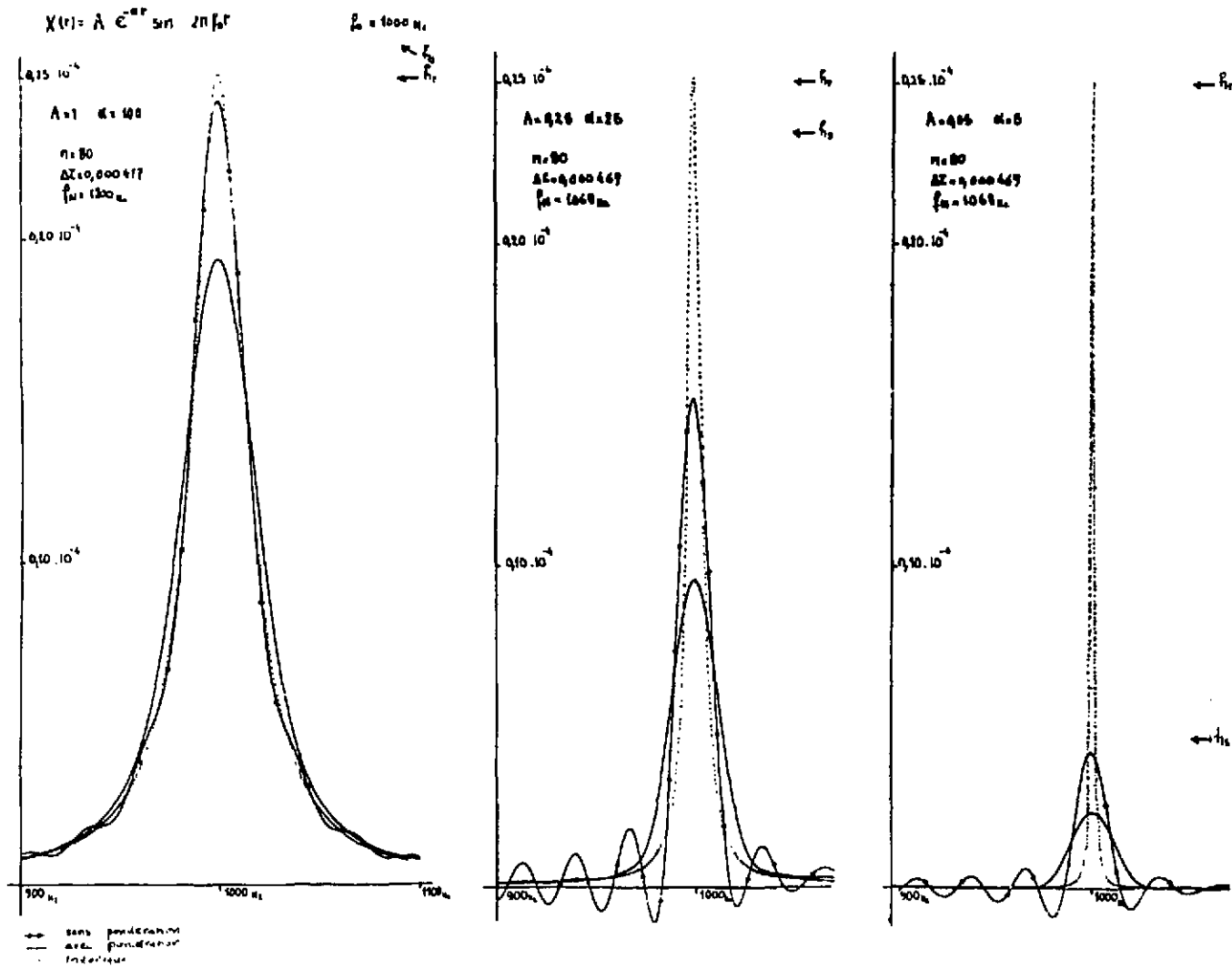
Considérons le signal  $X(t) = A e^{-\alpha t} \sin 2\pi f_0 t$ ,  $f_0$  étant fixe et  $\alpha$  variable.

La densité spectrale se présente sous la forme d'un pic de largeur variable.

La figure 26 donne la courbe théorique et les courbes obtenues par transformation de Fourier, ceci pour trois valeurs de  $\alpha$  :  $\alpha = 100$ ,  $\alpha = 25$ ,  $\alpha = 5$ , les valeurs correspondantes de  $A$  ont été choisies pour maintenir constante la hauteur théorique du pic  $h_t = \frac{A^2}{4\alpha^2}$ .

A mesure que le spectre se déforme, l'opérateur adapte le retard incrémental de façon à être toujours dans les conditions optimales.

Nous voyons que lorsque la largeur du pic diminue, le système d'analyse "décroche" progressivement, la courbe que l'on obtient se sépare de la courbe théorique et tend vers une



configuration en fenêtre spectrale qui ne traduit plus l'allure de la courbe théorique, mais conserve uniquement la notion d'énergie.

Si le pic théorique, dont la surface est  $\frac{C_0}{2}$  ( $C_0$  : valeur à l'origine de la fonction de corrélation) tendait à surface constante vers une pure raie de Dirac, on obtiendrait rigoureusement la fenêtre spectrale d'équation :

$$Q(f) = C_0 \tau_M \frac{\sin 2\pi(f - f_0)\tau_M}{2\pi(f - f_0)\tau_M}$$

d'ordonnée au sommet  $h_s = C_0 \tau_M$   
(ceci pour la courbe sans pondération)

Nous allons chiffrer par un critère empirique la valeur  $\alpha_d$  de  $\alpha$ , au-dessous de laquelle le système ne peut plus suivre.

Même si  $\alpha$  n'est pas nul, on peut définir  $h_s = C_0 \tau_M = \frac{A^2}{4\alpha} \tau_M$  ordonnée du sommet de la fenêtre spectrale que l'on obtiendrait si le système ne suivait plus du tout et considèrerait le pic théorique comme une raie de Dirac de même surface.

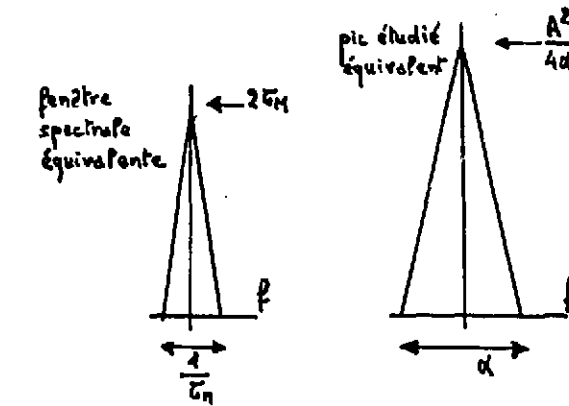
La courbe que l'on obtient effectivement (sans pondération) a toujours, quel que soit  $\alpha$ , son sommet situé au-dessous de deux asymptotes ; l'une est  $h_t(\alpha)$  prépondérante pour  $\alpha$  élevé (le système suit), l'autre est  $h_s(\alpha)$  prépondérante pour  $\alpha$  faible (le système ne suit plus).

Nous pouvons adopter le critère  $h_t(\alpha_d) = h_s(\alpha_d)$  pour marquer le passage d'un cas à l'autre, ce qui donne  $\frac{1}{\alpha_d} = \tau_M$ , on a à peu près  $\frac{1}{2\Delta\tau} = f_0$ , d'où :

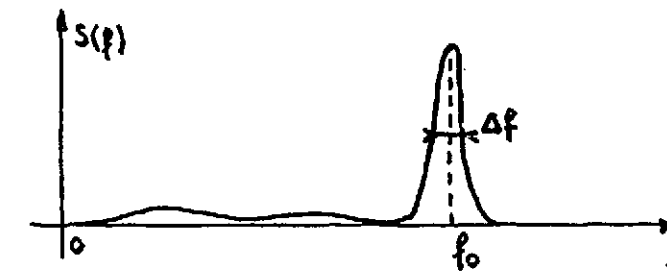
$$\alpha_d = \frac{2f_0}{n}$$

$n \approx N$  : nombre de points du corrélateur.

Remarquons que l'on trouverait une valeur  $\alpha_d$  identique si l'on adoptait comme critère : le système ne peut plus suivre lorsque la largeur équivalente de la fenêtre spectrale devient égale à la largeur équivalente du pic étudié (figure 27), ceci en assimilant la fenêtre spectrale et le pic étudié à des triangles de même surface et de même hauteur que les courbes réelles.



Si l'on a à étudier une densité spectrale se présentant comme un pic analogue à celui que nous venons de considérer, caractérisé par  $f_0$  et  $\Delta f$ , sa fréquence centrale et sa largeur à mi-hauteur (figure 28), par application du critère précédent le système d'analyse "décroche" lorsque  $N = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\frac{\Delta f}{f_0}}$  ; c'est l'inverse de  $\frac{\Delta f}{f_0}$  qui marque le degré de difficulté de l'analyse de cette densité spectrale.



Par exemple pour  $\alpha = 100$ ,  $f_0 = 1000$ , la valeur de décrochement est  $N = 20$ . Or, nous avons vu qu'il était nécessaire d'avoir un corrélateur à 80 points pour avoir une précision acceptable, il faut donc se ménager un coefficient de sécurité de 4 par rapport à la valeur de décrochement, il faut au moins avoir :

$$N = 3 \frac{1}{\frac{\Delta f}{f_0}}$$

Nous verrons plus loin que si la densité spectrale est nulle entre l'origine et le pic centré en  $f_0$ , on n'est pas astreint à des impératifs aussi rigoureux ; on peut accroître les performances dans de grandes proportions en ayant recours au sous-échantillonnage.

3 - ANALYSE D'UN SPECTRE ETENDU. INVARIANCE DU POUVOIR SEPARATEUR SUR LA GAMME DE FREQUENCE ETUDIEE -

Nous allons maintenant analyser une densité spectrale comportant deux fréquences privilégiées et nous allons mettre en évidence l'invariance du pouvoir séparateur sur toute la gamme étudiée (0,  $f_N$ ).

Considérons le signal :

$$X(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} \sin 2\pi f_1 t + A_2 e^{-\alpha_2 t} \sin 2\pi f_2 t$$

Sa densité spectrale se présente sous la forme de deux pics, l'un centré sur  $f_1$ , l'autre sur  $f_2$ , fixons les paramètres  $A_2, \alpha_2, f_2$  de la fréquence haute, c'est elle qui impose l'étendue de la gamme de fréquence à étudier (nous avons fixé  $f_N = 1700$  Hz) donc la largeur de la fenêtre spectrale.

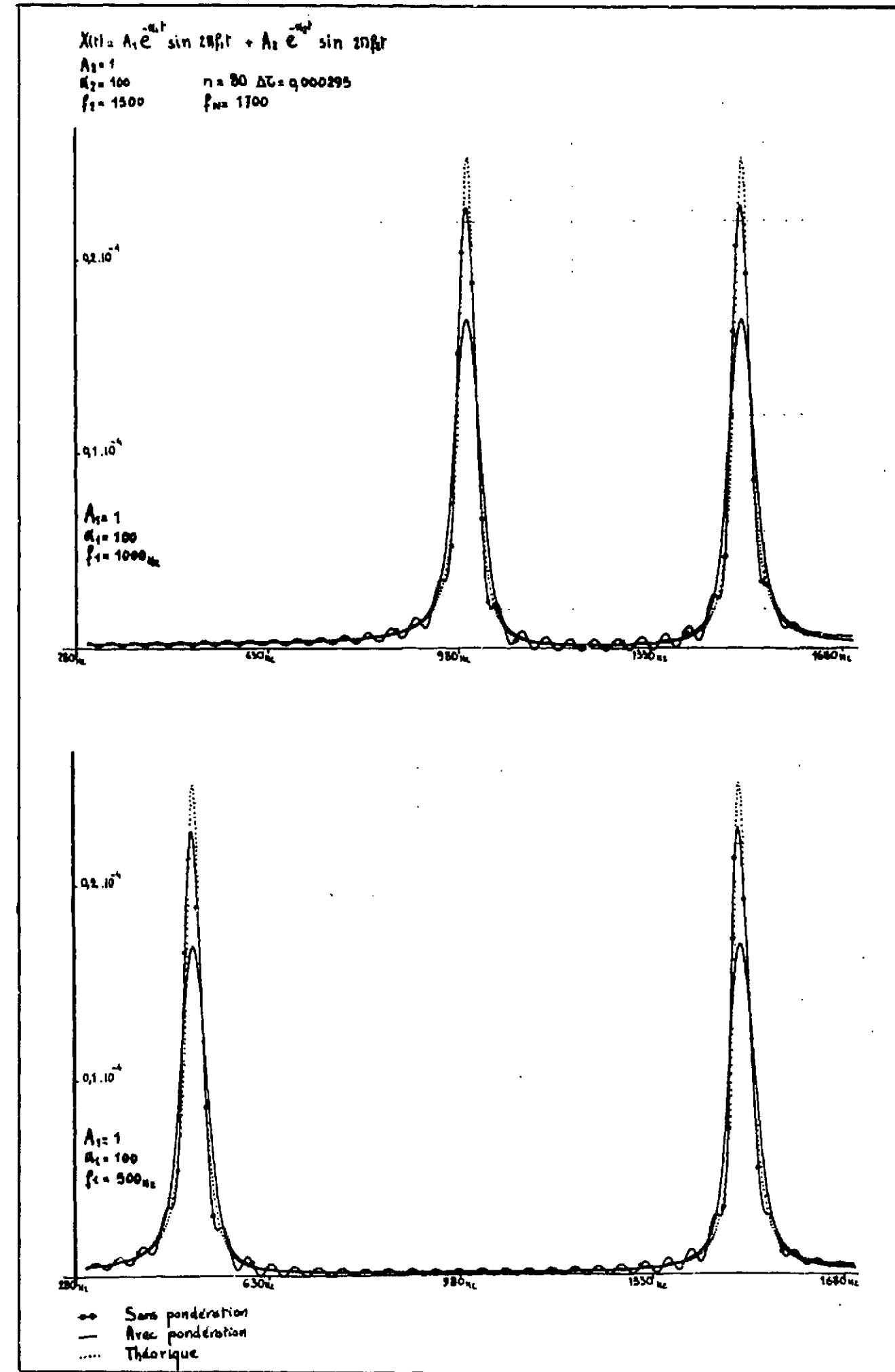
Faisons varier les paramètres de la fréquence basse.

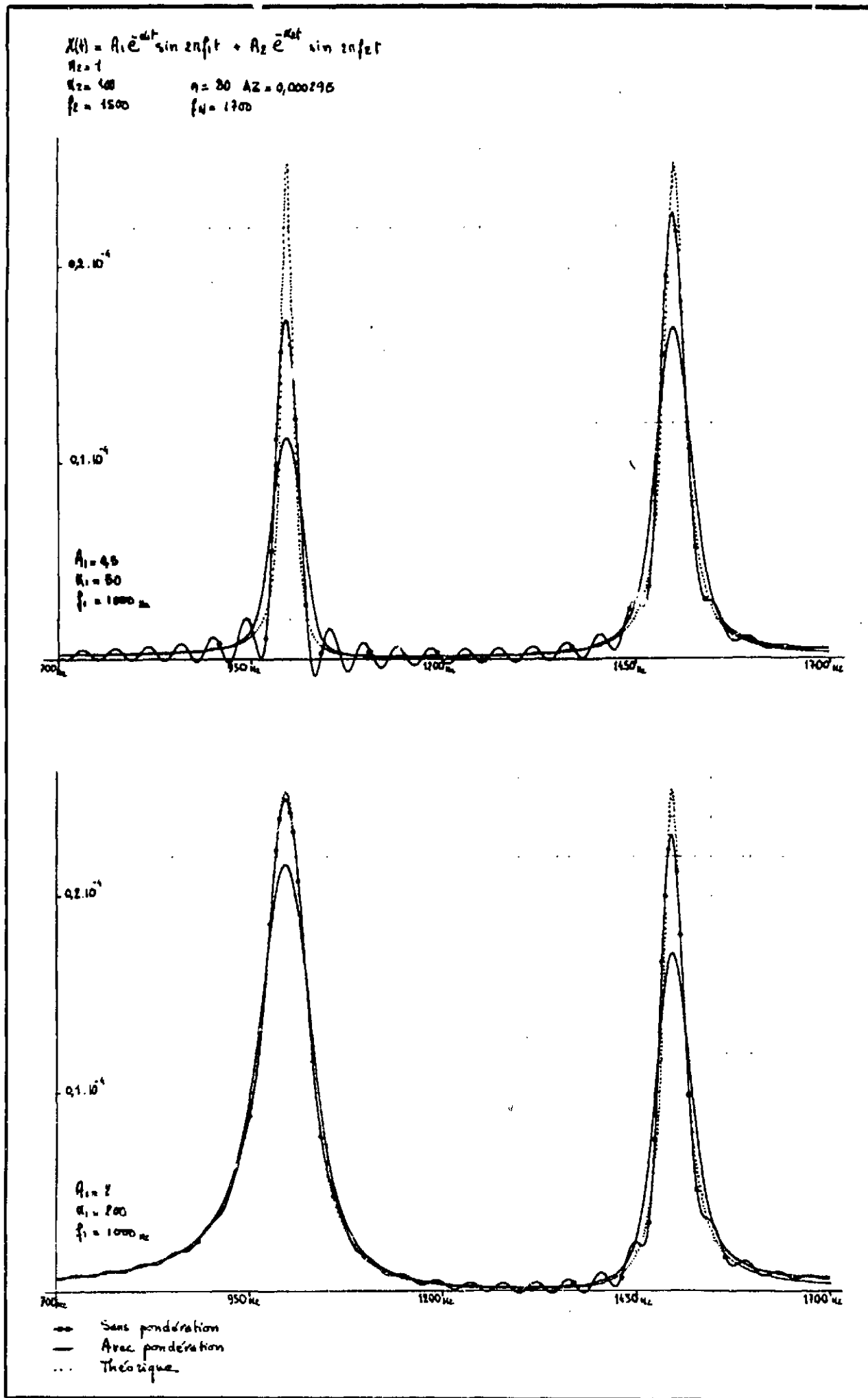
Sur la figure 29  $\alpha_1$  est fixe et  $f_1$  varie, on voit que le pic basse fréquence est obtenu avec une précision constante, quelle que soit sa position, de plus comme  $\alpha_1 = \alpha_2$ , le pic haute fréquence est également obtenu avec cette même précision.

Sur la figure 30  $f_1$  est fixe et  $\alpha_1$  varie, le pouvoir séparateur est le même que dans le cas précédent ; en comparant le pic basse fréquence au pic haute fréquence, on voit que :

- s'il est plus étroit ( $\alpha_1 = 50$ ) il est obtenu avec une moins bonne précision (erreur au sommet plus importante, oscillations latérales de grande amplitude, on se rapproche de la configuration en fenêtre spectrale),
- s'il est plus large ( $\alpha_1 = 200$ ) il est obtenu avec une meilleure précision.

Remarquons que dans tous les cas l'erreur au sommet du pic basse fréquence est en valeur relative  $e^{-\alpha_1 \tau M}$  et celle du pic haute fréquence  $e^{-\alpha_2 \tau M}$ .





Tout se passe comme si les deux exponentielles  $e^{-\alpha_1 \tau}$  et  $e^{-\alpha_2 \tau}$  qui seraient respectivement les enveloppes des fonctions de corrélation de :

$$X_1(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} \sin 2\pi f_1 t \quad \text{et} \quad X_2(t) = A_2 e^{-\alpha_2 t} \sin 2\pi f_2 t$$

étaient tronquées à  $\tau = \tau_M$  indépendamment l'une de l'autre, alors que sur la fonction de corrélation de  $X(t)$  ces deux exponentielles sont indiscernables.

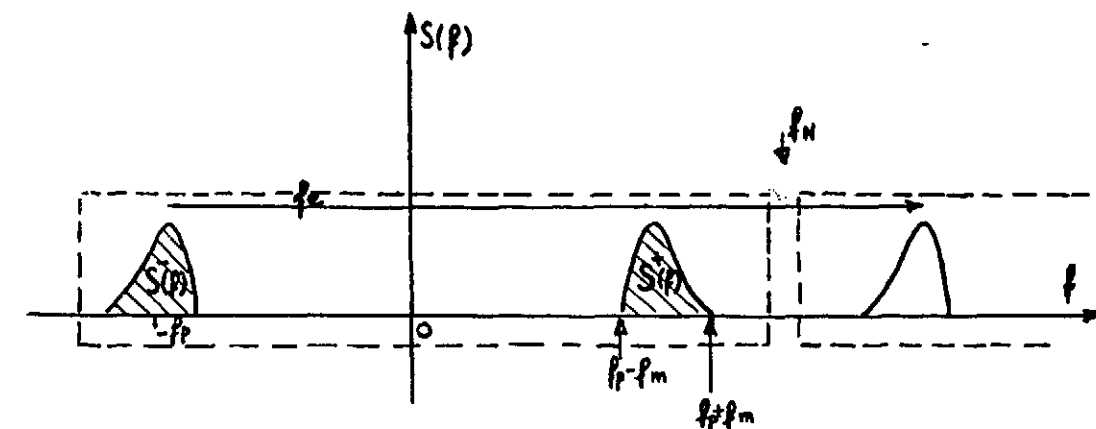
Lorsqu'on analyse une densité spectrale présentant un seul pic, la précision est acceptable si le nombre de points du corrélateur est moins égale à  $3 \frac{1}{\frac{\Delta f}{f_0}}$ . Si la densité spectrale

étudiée présente plusieurs pics, cette formule est toujours valable, mais  $\Delta f$  et  $f_0$  ne sont plus nécessairement les caractéristiques du même pic,  $\Delta f$  sera la largeur à mi-hauteur du pic le plus étroit, et  $f_0$  la fréquence centrale du pic le plus haut en fréquence.

#### 4 - EXTENSION DU THEOREME DE SHANNON SOUS ECHANTILLONNAGE -

##### 4.1 - Disposition des spectres traduits en sous-échantillonnage

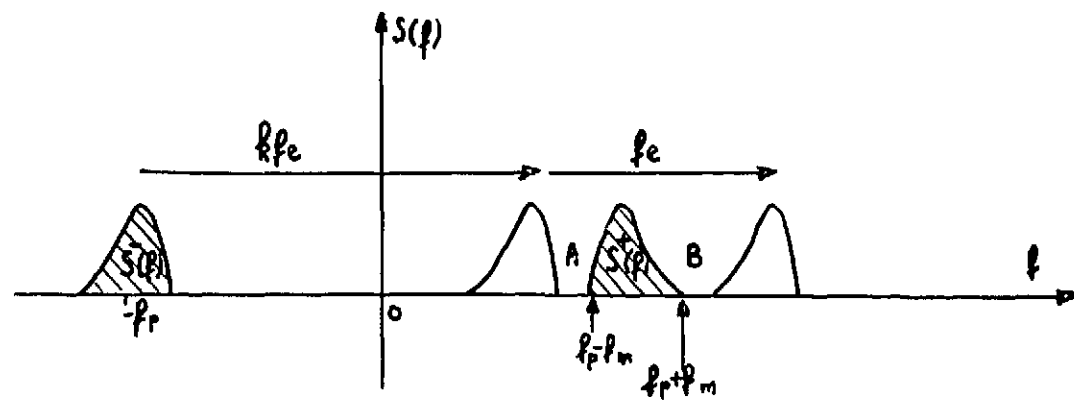
Soit à analyser un signal dont la densité spectrale du côté des fréquences positives  $S^+(f)$  est nulle en dehors d'une bande  $(f_p - f_m, f_p + f_m)$ .



Le théorème de Shannon, sous sa forme habituelle, veut que l'on choisisse un retard incrémental  $\Delta \tau$  tel que la fréquence de Nyquist  $f_N = \frac{1}{2 \Delta \tau}$  se trouve dans l'intervalle  $(f_p + f_m, +\infty)$  et de préférence en  $f_p + f_m$  puisque la précision est d'autant meilleure que la fréquence de Nyquist est plus basse ; ou, sous une autre forme, il faut que la première traduite vers la droite provenant de  $S^-(f)$  se trouve à droite de  $S^+(f)$ , comme le montre la figure 31.

Cette façon de procéder conduit à étudier une gamme de fréquence  $(0, f_p + f_m)$  qui est beaucoup trop étendue, il en résulte une analyse très grossière puisque la fenêtre spectrale a une largeur équivalente :  $\frac{\text{gamme étudiée } (0, f_N)}{n}$ .

Il serait préférable, pour avoir une analyse fine, de restreindre la gamme étudiée autour de la bande de fréquence intéressante.



Nous allons mettre à profit l'absence de densité spectrale entre 0 et  $f_p - f_m$ . Adoptons une fréquence d'échantillonnage plus faible que celle qui était précédemment choisie, la translatée immédiatement à droite de  $S^+(f)$  n'est plus nécessairement la première issue de  $S^-(f)$  mais elle est d'un rang plus élevé, le rang  $(k + 1)$  (figure 32). Si aucun chevauchement ne se produit entre les diverses translatées, il n'y a pas davantage de perte d'information qu'en échantillonnage normal.

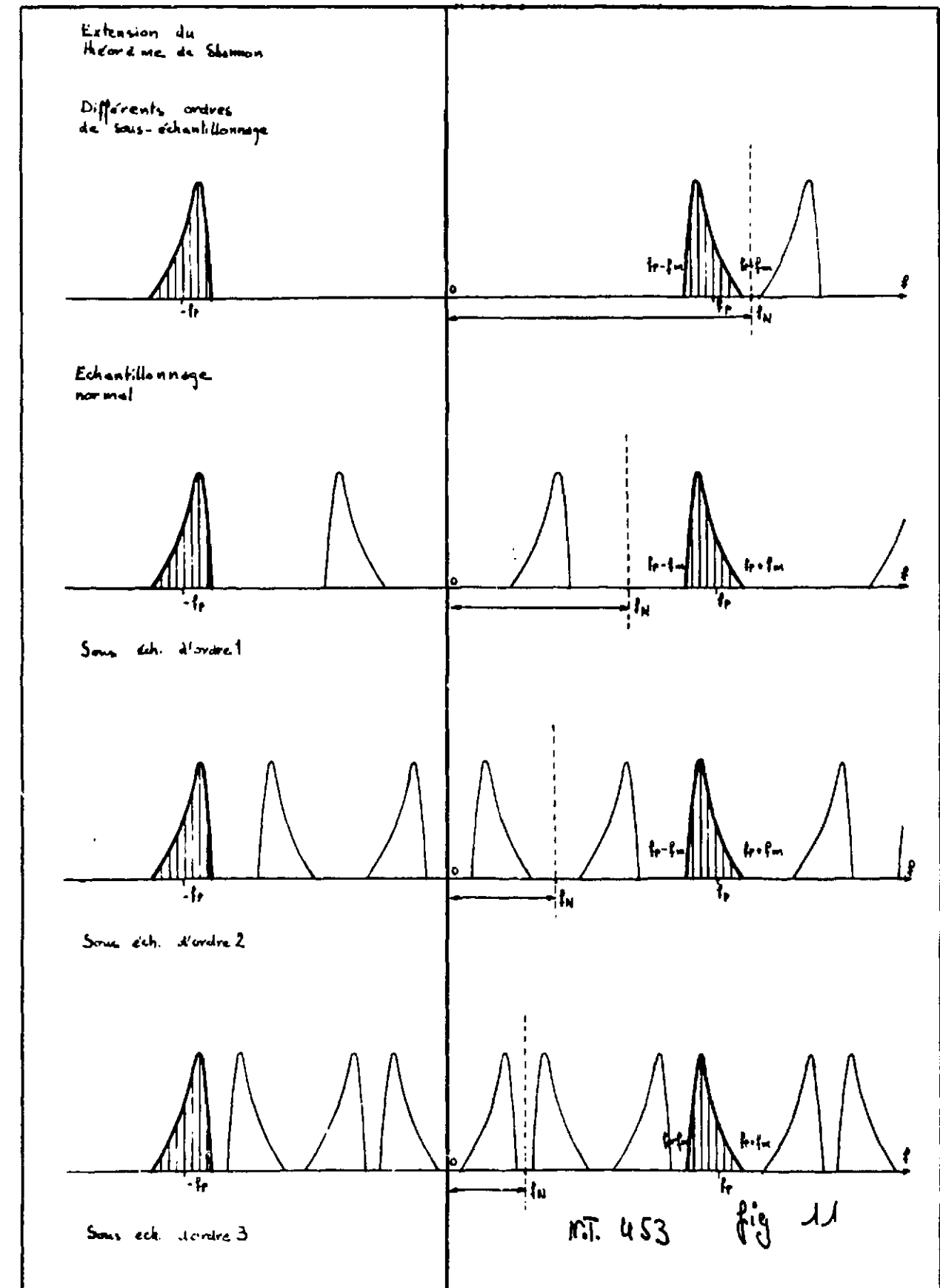
$k$  peut être appelé l'ordre de sous-échantillonnage, c'est à la fois le rang de la translatée issue de  $S^-(f)$  qui se trouve immédiatement à gauche de  $S^+(f)$ , et d'autre part le nombre de translatées qui sont venues se loger entre l'origine et  $S^+(f)$ .

La figure 33 montre la disposition des différentes translatées et la position de la fréquence de Nyquist pour  $k = 0$  (échantillonnage normal) et  $k = 1, 2, 3$ .

4.2 - Choix de  $f_N$ , théorème de Shannon généralisé

Le spectre  $S^+(f)$  est encadré par les translatées de rang  $k$  et  $(k + 1)$  issues de  $S^-(f)$ . Écrivons que l'une et l'autre ne chevauchent pas  $S^+(f)$ .

Remarquons que les deux conditions portant sur la fréquence d'échantillonnage qui en découlent sont nécessaires et suffisantes, s'il n'y a pas de chevauchement en A et B il n'y en a à aucun endroit sur la totalité de l'axe des fréquences, et l'échantillonnage de la fonction de corrélation n'apporte aucune perte d'information.



NT. 453 fig 11



Soit  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage ; elle doit satisfaire aux deux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(f_p - f_m) + k f_e < f_p - f_m \quad \text{soit} \quad k f_e < 2(f_p - f_m) \quad (\text{pas de chevauchement en A}) \\ -(f_p + f_m) + (k+1) f_e > f_p + f_m \quad \text{soit} \quad (k+1) f_e > 2(f_p + f_m) \quad (\text{pas de chevauchement en B}) \end{array} \right.$$

Condensons ces deux relations en une seule :

$$\frac{2(f_p + f_m)}{k+1} < f_e < \frac{2(f_p - f_m)}{k}$$

ou en transposant en fréquence de Nyquist ( $f_N = \frac{f_e}{2}$ ) :

$$\frac{f_p + f_m}{k+1} < f_N < \frac{f_p - f_m}{k}$$

Il est nécessaire pour qu'un sous échantillonnage d'ordre  $k$  puisse être effectué que :

$$\frac{f_p + f_m}{k+1} < \frac{f_p - f_m}{k}$$

soit :

$$2k + 1 < \frac{f_p}{f_m}$$

La figure 34 représente les intervalles de fréquence dans lesquels il est possible de choisir  $f_N$  en fonction des valeurs de  $f_p$  et de  $f_m$  et ceci pour différentes valeurs de  $k$  (le choix de  $f_N$  entraîne celui de  $\Delta\tau$ ).

En abscisse est porté  $x = \frac{f_p}{f_m}$  et en ordonnée  $y = \frac{f_N}{f_m}$ .

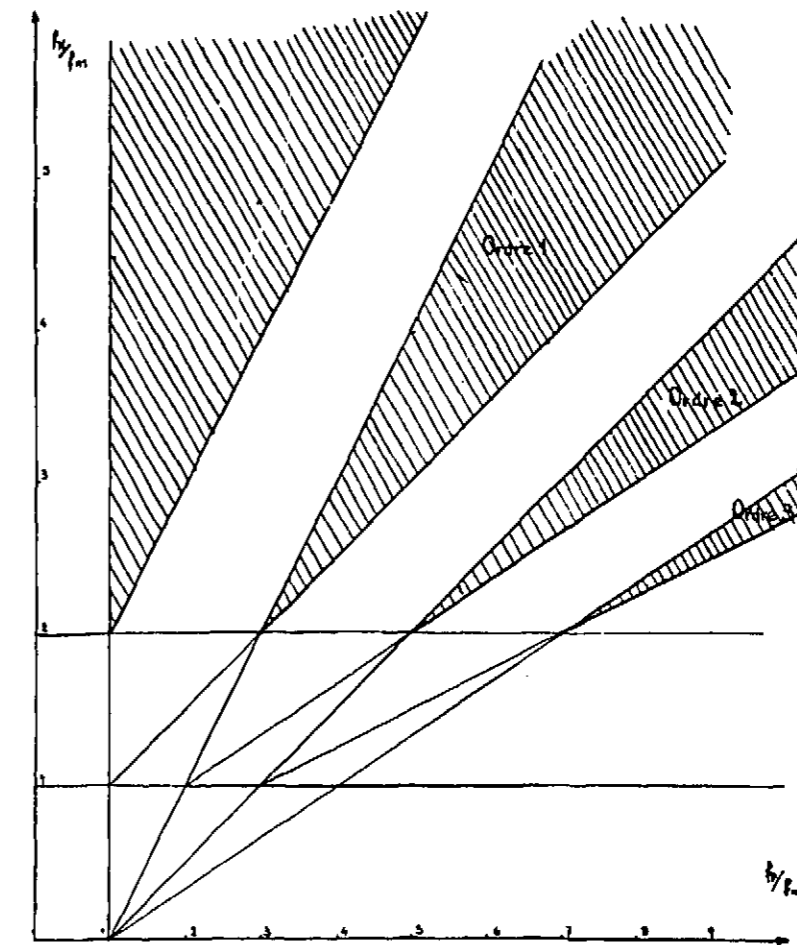
Exemple : sous échantillonnage d'ordre 2 (ne peut être envisagé que si  $5 < \frac{f_p}{f_m}$ )

$y = \frac{f_N}{f_m}$  doit être compris entre deux droites.

D'une part :  $y = \frac{f_p - f_m}{k f_m} = \frac{1}{2} (x - 1)$

D'autre part :  $y = \frac{f_p + f_m}{(k+1) f_m} = \frac{1}{3} (x + 1)$

Extension du théorème de Shannon dans le cas de  $f_p \neq f_m$  en fonction de  $f_p$  et  $f_m$



Remarquons que toutes les zones où l'on peut choisir  $f_N$  sont telles que  $f_N > 2 f_m$ . En effet, dans le cas extrême où toutes les translatées sont juxtaposées, il faut tout de même avoir  $f_N \geq 2 f_m$ .

(J. L. DUFLOS a obtenu des résultats analogues quant à la modification du rapport signal/bruit due à l'échantillonnage en détection des signaux faibles - Référence 2).

Connaissant la fréquence centrale  $f_p$  et la largeur de bande  $2 f_m$  du signal, on peut positionner l'abscisse  $\frac{f_p}{f_m}$  et on voit apparaître en ordonnée tous les intervalles de fréquence à l'intérieur desquels il est possible de placer  $f_N$ .

En principe, on choisira l'intervalle d'ordonnée la plus faible, situé immédiatement au-dessus de l'horizontale  $y = 2$ , il correspond au sous-échantillonnage d'ordre le plus élevé.

On a intérêt à accroître autant que faire se peut l'ordre de sous-échantillonnage, puisque ce faisant on restreint la gamme de fréquence étudiée, on améliore donc d'autant la finesse d'analyse.

De plus l'opérateur voit sur son écran la totalité des points du spectre situés sur la partie significative (en effet en pratique la courbe  $S(f)$  se présentera comme une suite de points régulièrement espacés sur la gamme étudiée  $(0, f_N)$ ).

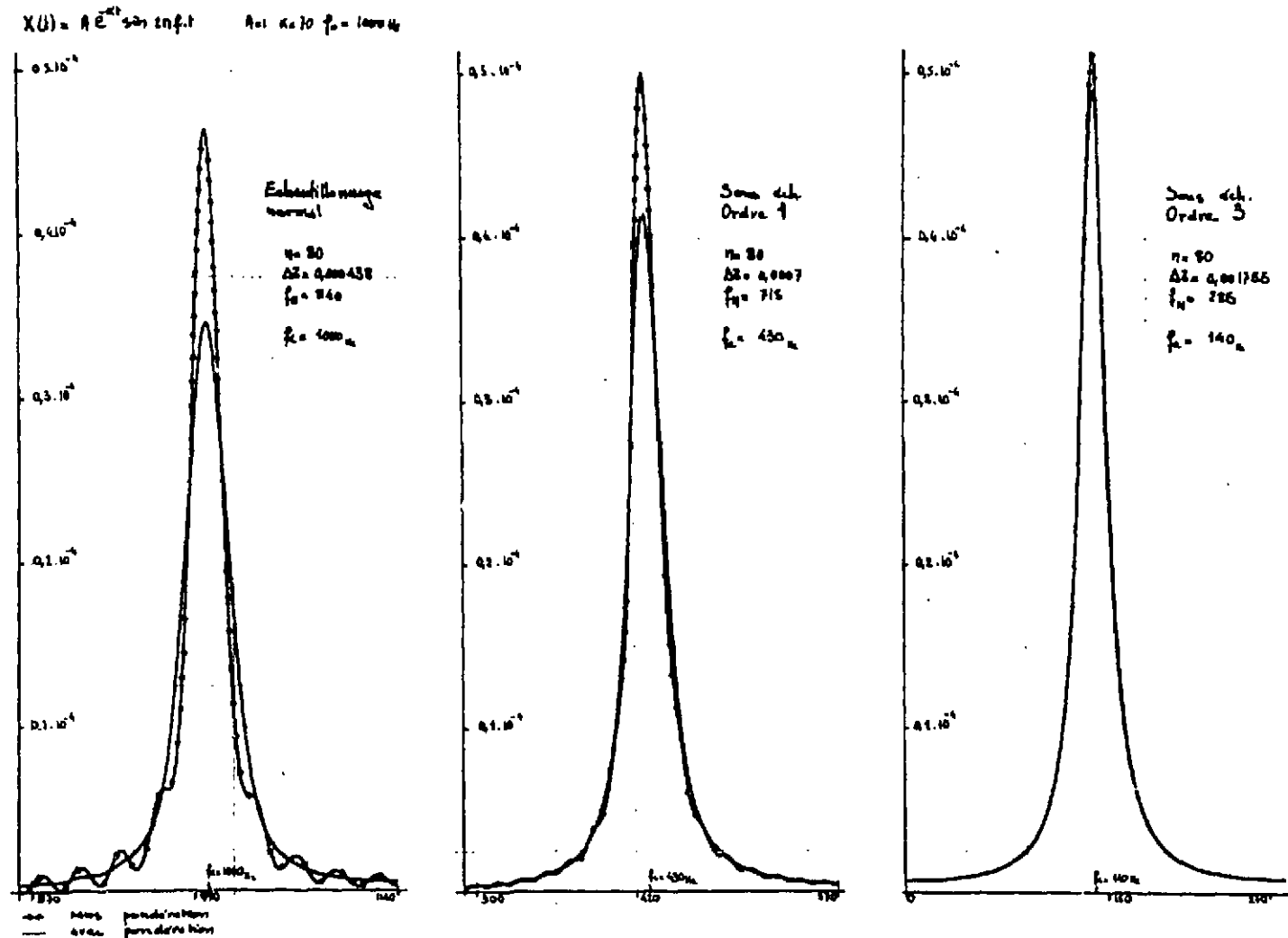
Remarquons que pour les sous-échantillonnages d'ordre impair la courbe obtenue n'est pas  $S^+(f)$  mais  $S^-(f)$ , il est donc nécessaire d'effectuer la correction pour obtenir la courbe cherchée.

Le sous-échantillonnage joue le rôle de la transposition de fréquence de l'analyse spectrale par filtre sélectif.

4.3 - Exemple

La figure 35 donne un exemple de sous-échantillonnage. Il s'agit d'un signal du type :  $X(t) = A e^{-\alpha t} \sin 2 \pi f_0 t$

Avec :  $\alpha = 70$   
 $f_0 = 1000$



Nous allons admettre pour  $f_p$  et  $f_m$  les valeurs :

$$f_p = 1000 \text{ Hz}$$

$$f_m = 140 \text{ Hz}$$

Formons le rapport :  $\frac{f_p}{f_m} = 7,15$ .

On peut donc concevoir des sous-échantillonnages d'ordre  $k$  tant que  $2k + 1 < 7,15$ , c'est-à-dire jusqu'à  $k = 3$ .

$$f_p + f_m = 1140 \qquad f_p - f_m = 860$$

Il faut choisir  $f_N$  entre :  $\frac{f_p + f_m}{k+1}$  et  $\frac{f_p - f_m}{k}$

k	$\frac{f_p + f_m}{k+1}$	$\frac{f_p - f_m}{k}$	$f_N$ valeur choisie	$f_c$ fréquence centrale après transposition	Gamme de fréquence où est ramené le spectre
0	1140	$\infty$	1140	1000	860 - 1140
1	570	860	715	- 1000 + 1430 = 430	290 - 570
2	380	430	405	1000 - 810 = 190	50 - 330
3	285	286	285	- 1000 + 2 x 570 = 140	0 - 280

La figure représente les courbes obtenues avec et sans pondération pour  $k = 0, 1, 3$ .

On voit très nettement que la précision s'améliore à mesure que l'on augmente l'ordre du sous-échantillonnage, (la courbe théorique est pratiquement confondue avec la courbe d'ordre 3, sans pondération, à un retournement de calque près).

Cet exemple est en somme la continuation de la figure 25 où l'on avait vu qu'il fallait abaisser au maximum la fréquence de Nyquist, mais comme l'on se cantonnait à l'échantillonnage normal, on ne pouvait aller au-dessous de  $f_p + f_m$ , fréquence à laquelle l'empiètement avait atteint la valeur maximale permise, ici cette façon de procéder ne donne pas de résultats satisfaisants (à cause de  $\alpha = 70$  au lieu de  $\alpha = 100$ ) en ayant recours au sous-échantillonnage nous avons pu aller plus loin dans l'abaissement de  $f_N$ , et descendre sa valeur au-dessous de  $f_p - f_m$ .

Notons en outre, ce qui n'apparaît pas sur ces courbes continues, qu'en échantillonnage normal, 25 % des points de  $S(f)$  se trouvent dans la zone intéressante alors qu'en sous-échantillonnage d'ordre 3 la totalité des points s'y trouve.

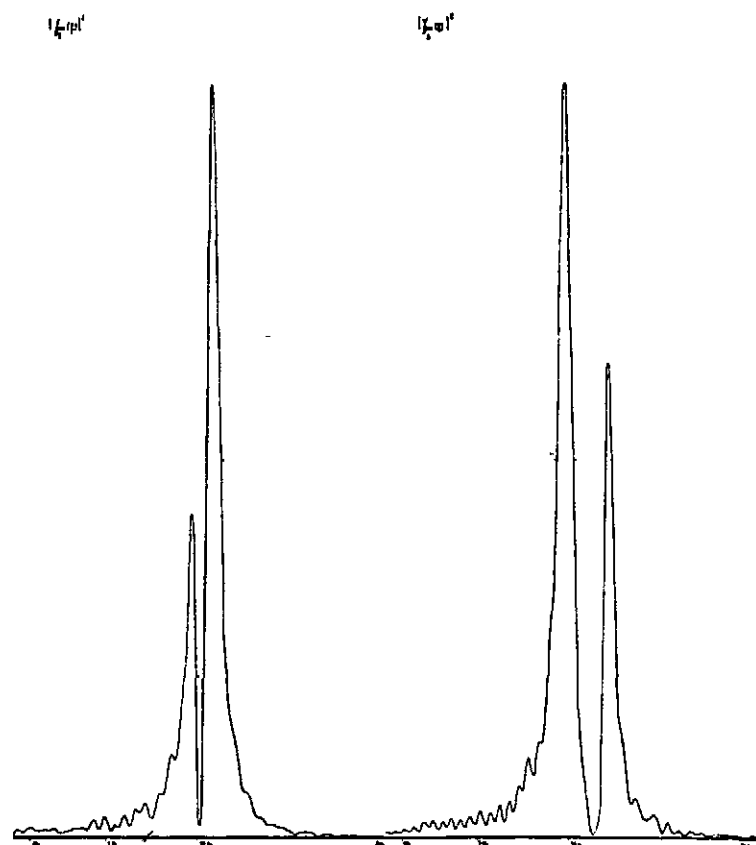
5 - EXEMPLE D'APPLICATION -

La figure 36 donne un exemple d'application de cette méthode d'analyse spectrale par corrélation.

Sur un simulateur analogique a été câblé un système de deux équations différentielles du deuxième ordre, couplées entre elles par les termes de vitesse et de position.

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' + 2\alpha_1 \omega_1 x' + \omega_1^2 x + a_1 y' + b_1 y = e(t) \\ y'' + 2\alpha_2 \omega_2 y' + \omega_2^2 y + a_2 x' + b_2 x = 0 \end{array} \right.$$

L'une des deux équations est excitée par un bruit blanc binaire qui est la grandeur d'entrée  $e$ , la grandeur de sortie est  $s = x + y$ .



Les courbes de la figure représentent le module carré de la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation entrée-sortie  $C_{se}(\tau)$ , ceci pour deux valeurs différentes de l'ensemble des paramètres  $\alpha, \omega, a, b$ .

Ces courbes permettent la mesure des fréquences de résonance et des amortissements de chacun des deux pics, valeurs différentes de celles qui ont été introduites dans l'équation à cause du couplage.

CHAPITRE V

---

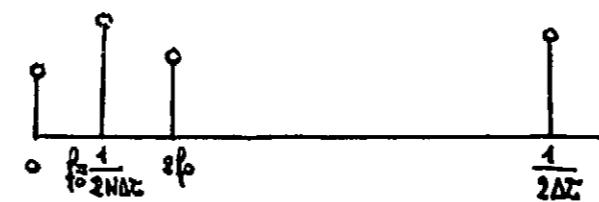
REALISATION DE L'APPAREIL

- 1 - Principe du transformateur de Fourier.
- 2 - Générateur de fréquences.
- 3 - Autres organes, Temps de calcul.

1 - PRINCIPE DU TRANSFORMATEUR DE FOURIER -

L'appareil calcule la transformée de Fourier de la fonction de corrélation dans la gamme  $(0, f_N = \frac{1}{2 \Delta \tau})$ .

Il effectue ce calcul pour une suite discrète de valeurs de la fréquence, le pas choisi est  $f_0 = \frac{1}{2 N \Delta \tau}$ .



N est le nombre de points du corrélateur

$$N = n + 1 ; n = \frac{\text{retard maximal } \tau_M}{\text{retard incrémental } \Delta \tau}$$

La densité spectrale élaborée par l'appareil se présente sous forme de  $(N + 1)$  points (figure 37), l'appareil calcule successivement les fréquences :

$$0 \quad f_0 \quad 2 f_0 \quad \dots \quad k f_0 \quad \dots \quad N f_0$$

En effet, faire ces calculs de façon simultanée augmenterait inutilement la complexité de l'appareil, il faut à ce sujet signaler la différence entre l'opération corrélation et l'opération transformation de Fourier.

Pour calculer la fonction de corrélation d'un signal  $X(t)$ , il faut réaliser l'opération :

$$\int_0^T X(t) X(t - \tau) dt$$

portant sur une durée  $T$ ,  $T$  doit être suffisante pour obtenir une moyenne statistique significative ( $T$  peut varier de quelques ms à quelques heures pour des phénomènes très lents).

Ainsi, quelle que soit la rapidité de fonctionnement du multiplieur, il faut attendre le temps  $T$  pour obtenir un point de la fonction de corrélation, et le temps  $NT$  pour obtenir  $N$  points ; on conçoit donc l'intérêt que présente un multicorrélateur qui calcule simultanément les  $N$  points pendant le temps  $T$ .

Pour calculer la transformée de Fourier, le problème est différent, on dispose à chaque instant de la totalité de l'information à traiter (la fonction de corrélation). En utilisant un multiplieur rapide, on peut obtenir en un temps très court la transformée de Fourier, et ceci quel que soit le signal X (t) (hautes fréquences ou très basses fréquences), il n'est donc pas nécessaire de calculer simultanément les différents points.

Examinons quelles sont les différentes fonctions à réaliser à l'intérieur de cet appareil.

Pour le calcul de chaque fréquence, l'opération à réaliser est :

$$S_R^+(k f_0) = \Delta \tau \left( \frac{C(0)}{2} + \sum_{i=1}^n C(i \Delta \tau) \cos(2 \pi k f_0 i \Delta \tau) \right)$$

$$= \Delta \tau \left( \frac{C(0)}{2} + \sum_{i=1}^n C(i \Delta \tau) \cos\left(k i \frac{\pi}{N}\right) \right)$$

s'il s'agit de la partie réelle,

$$S_I^+(k f_0) = \Delta \tau \left( 0 + \sum_{i=1}^n C(i \Delta \tau) \sin k i \frac{\pi}{N} \right)$$

s'il s'agit de la partie imaginaire, il faut donc effectuer la somme de N produits du type : (échantillon C (τ) x échantillon cosinus).

Un générateur de fréquence a pour rôle d'élaborer les échantillons de cosinus nécessaires.

Les produits sont effectués par un multiplieur à découpage (modulation amplitude-temps) et sommés dans un intégrateur.

Le résultat est visualisé ou mis en mémoire et, après remise à zéro de l'intégrateur, l'appareil calcule la fréquence suivante.

La figure 38 donne le schéma de principe de l'appareil.

## 2 - GENERATEUR DE FREQUENCES -

### 2.1 - Rôle du générateur de fréquences

Le rôle du générateur de fréquences est d'associer à la suite des N échantillons :

$$C(0) \quad C(\Delta \tau) \dots \dots \dots C(i \Delta \tau) \dots \dots \dots C(n \Delta \tau)$$

la suite appropriée de N valeurs de cosinus correspondant à la fréquence que l'on veut calculer, par exemple pour la fréquence k f<sub>0</sub> :

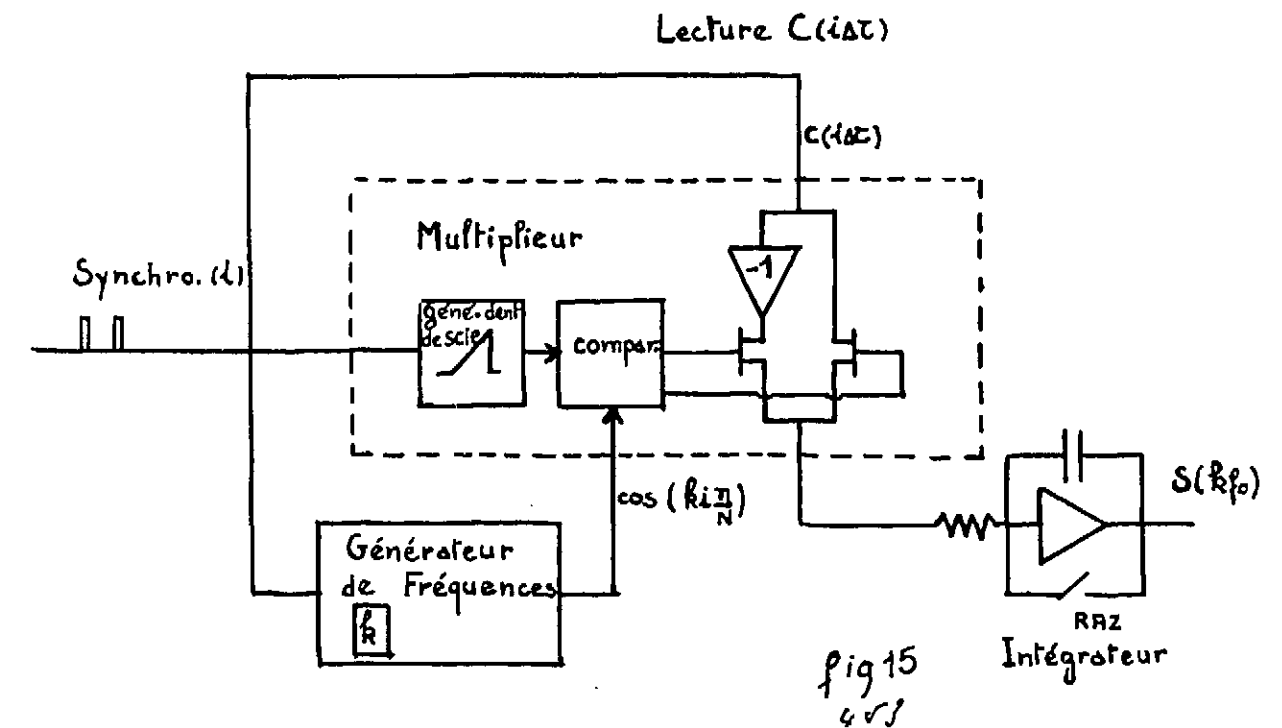
$$\cos(0) \quad \cos\left(k \frac{\pi}{N}\right) \dots \dots \dots \cos\left(k i \frac{\pi}{N}\right) \dots \dots \dots \cos\left(k n \frac{\pi}{N}\right)$$

quelle que soit la fréquence étudiée, les arguments du cosinus qui sont utilisés, sont tous des multiples de  $\frac{\pi}{N}$ .

Le générateur de fréquence associé à chaque valeur du couple d'indices k et i l'échantillon convenable du cosinus, cet échantillon de cosinus est prélevé parmi la suite de N + 1 valeur ci-dessous :

$$\cos(0) \quad \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \dots \dots \dots \cos\left(i \frac{\pi}{N}\right) \dots \dots \dots \cos\left(n \frac{\pi}{N}\right) \cos(\pi)$$

Lorsque l'on calcule la fréquence de base f<sub>0</sub>, les N premières valeurs sont utilisées successivement et associées aux N échantillons de C (τ).



Principe du Transformateur de Fourier

Lorsque l'on calcule la fréquence  $2 f_0$ , on utilise :

$$\cos(0) \quad \cos\left(2 \frac{\pi}{N}\right) \dots \dots \cos\left(2 i \frac{\pi}{N}\right) \dots \dots \cos\left(2 n \frac{\pi}{N}\right)$$

valeurs de la suite de cosinus prises de 2 en 2.

Pour la fréquence  $k (f_0)$  on utilise les valeurs de la suite prises de  $k$  en  $k$  :

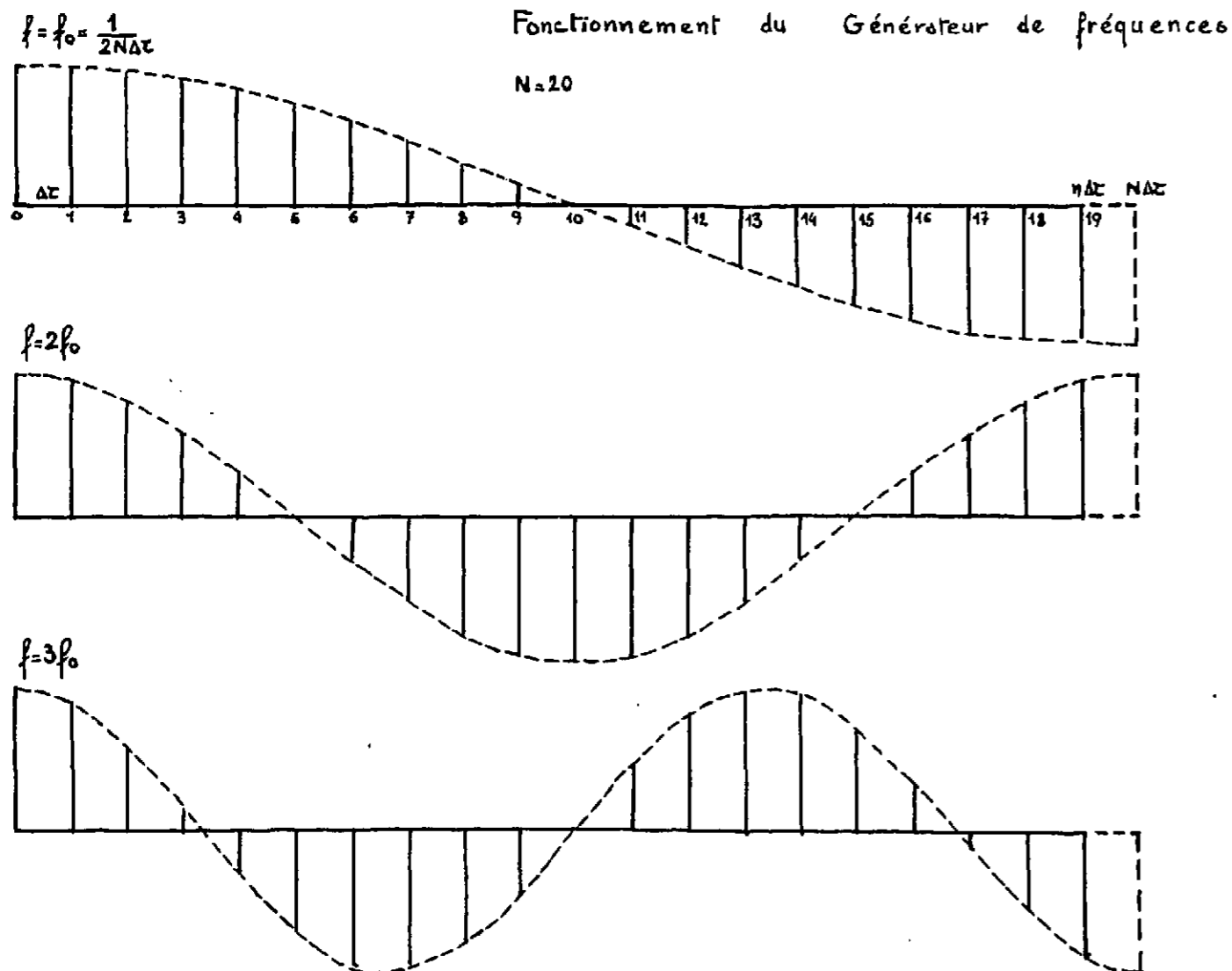
$$\cos(0) \quad \cos\left(k \frac{\pi}{N}\right) \dots \dots \cos\left(k \frac{i \pi}{N}\right) \dots \dots \cos\left(k \frac{n \pi}{N}\right)$$

La dernière fréquence calculée correspond à  $k = N$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \cos(0) & \cos(\pi) & \dots & \cos(i\pi) & \dots & \cos(n\pi) & \text{soit :} \\ +1 & -1 & \dots & (-1)^i & \dots & (-1)^n & \end{array}$$

c'est la fréquence de Nyquist pour laquelle le cosinus décrit une demi-période d'un échantillon de  $C(\tau)$  au suivant.

La figure 39 donne dans le cas  $N = 20$  la suite d'échantillons de cosinus utilisés.



### 2.2 - Progression des adresses

Les échantillons de cosinus sont repérés par une adresse. A un instant donné l'adresse de l'échantillon de cosinus en cours de multiplication est contenue dans un registre accumulateur et la valeur de  $k, n^o$  d'ordre de la fréquence étudiée, est contenue dans un compteur.

Le calcul d'une fréquence  $k f_0$  se fait par multiplication terme à terme de la suite des échantillons de  $C(\tau)$  et de la suite des échantillons de cosinus, pris de  $k$  en  $k$ . Cette suite de multiplication est synchronisée par un train d'impulsions, chaque impulsion fait progresser d'une unité l'adresse de l'échantillon de  $C(\tau)$  et de  $k$  unités l'adresse de l'échantillon de cosinus.

Cette progression de  $k$  unités se fait par addition du contenu du compteur au contenu précédent de l'accumulateur, au moyen d'addeurs binaires.

Un diviseur par  $N$  donne une impulsion chaque fois que la série des  $N$  multiplications est terminée, c'est-à-dire chaque fois que le calcul d'une fréquence est terminé.

Cette impulsion ajoute une unité à la valeur précédente de  $k$  ainsi, lorsque après prélèvement du résultat et remise à zéro, la série suivante de  $N$  multiplications va être effectuée, les valeurs du cosinus seront prises de  $(k + 1)$  en  $(k + 1)$  au lieu de l'être de  $k$  en  $k$ .

Lorsque toutes les fréquences sont calculées ( $k = 0, k = 1 \dots k = N$ ) le calcul reprend à son début.

Pour le calcul de la partie imaginaire, la seule modification à apporter au calcul ci-dessus est le point de départ de la suite des cosinus, au lieu de partir de l'échantillon de valeur 1, on part de l'échantillon de valeur 0 distant d'un quart de période.

### 2.3 - Décodage adresse-échantillon de cosinus

Il s'agit d'associer à chaque adresse ( $X_1 X_2 \dots$ ) contenue dans l'accumulateur, la valeur correspondante de l'échantillon de cosinus. Deux solutions peuvent être adoptées :

- On représente les  $(N + 1)$  valeurs de cosinus nécessaires par autant de tensions analogiques, il faut utiliser  $(N + 1)$  potentiomètres et  $(N + 1)$  transistors à effet de champ pour "lire" ces tensions.
- On utilise un système générateur de fonctions procédant en deux étapes :

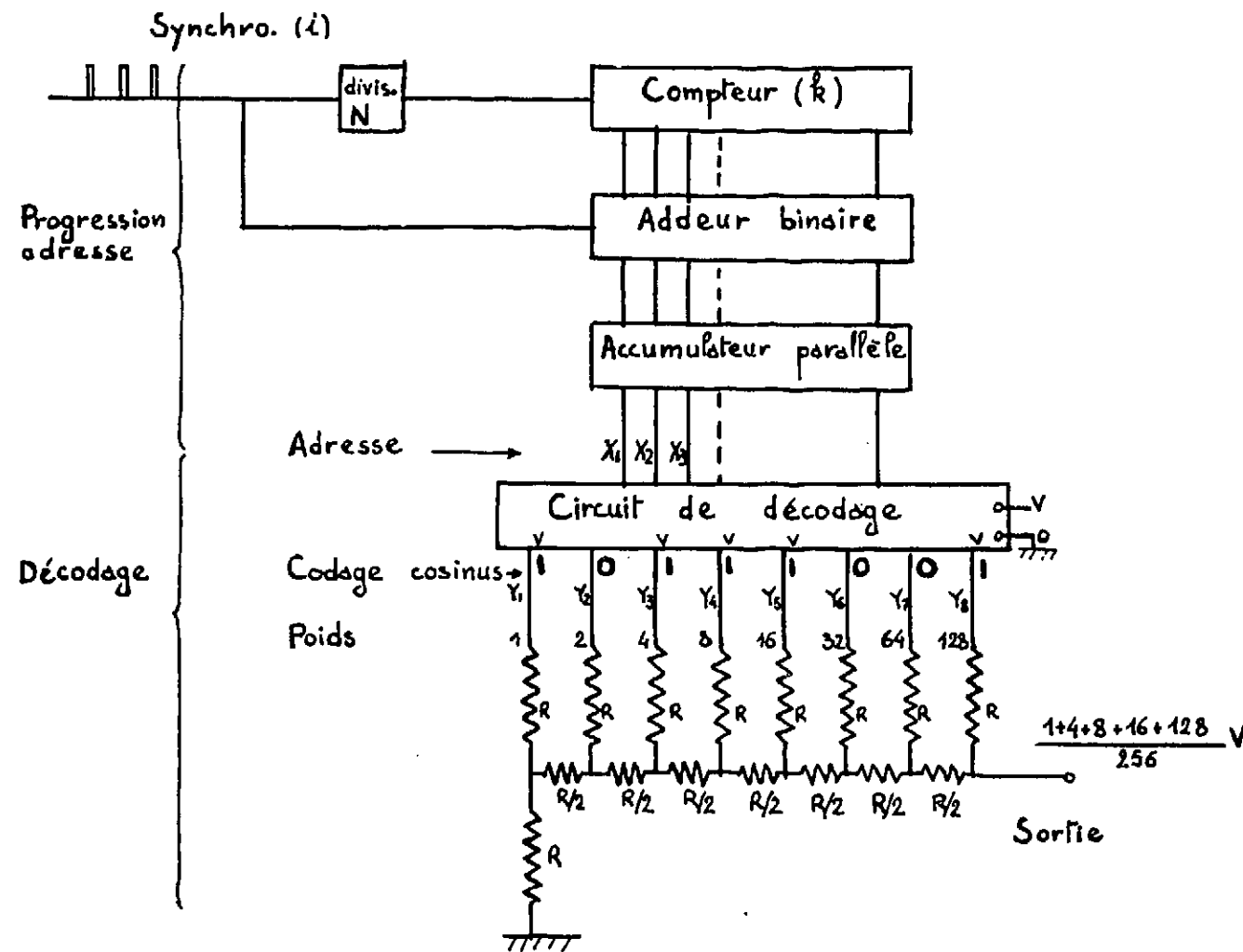
- . un circuit de décodage transforme les variables adresse ( $X_1 X_2 \dots$ ) en variables ( $Y_1 Y_2 \dots$ ) qui représentent sous forme digitale la valeur de cosinus correspondante.
- . un réseau de résistances en T (figure 40) fait office de diviseur potentiométrique, il possède un certain nombre d'entrées attaquées par les variables ( $Y_1 Y_2 \dots$ ) chaque entrée est susceptible d'être portée au potentiel V (état  $Y = 1$ ) ou au potentiel 0 (état  $Y = 0$ ).

On démontre que les poids des différentes entrées sont dans les rapports 1, 2, 4 ...

Ainsi, avec 8 résistances, on peut obtenir 256 valeurs différentes du potentiel de sortie, l'incrément entre deux valeurs successives est  $V/256$ , pour augmenter cette précision, il suffit d'augmenter le nombre d'entrées du réseau en T.

Dans le cas de la figure, la combinaison des variables de codage ( $Y_1 Y_2 \dots Y_8$ ) est : 1 0 1 1 1 0 0 1, la tension de sortie est :  $\frac{1 + 4 + 8 + 16 + 128}{256} V = \frac{157}{256} V$ .

### Générateur de fréquences



On pourrait concevoir d'autres circuits générateurs de fonction, faisant correspondre à une adresse une tension représentative de la fonction, l'intérêt de ce système est sa simplicité, avec 8 résistances seulement on obtient une précision de 0,4 % sur les échantillons de cosinus, alors qu'avec la première solution il fallait 200 potentiomètres et 200 transistors pour un transformateur de Fourier à 200 pts et d'autre part une précision de 0,4 % pouvait difficilement être atteinte.

La figure 40 donne un schéma de principe de fonctionnement du générateur de fréquence.

### 3 - AUTRES ORGANES, TEMPS DE CALCUL -

#### 3.1 - Multiplieur intégrateur

Le rôle du multiplieur est d'effectuer le produit de deux échantillons représentés par des tensions analogiques.

Nous utilisons un multiplieur à découpage à double modulation, la surface d'une impulsion modulée en largeur par X et en amplitude par Y est proportionnelle à XY.

La modulation en largeur est obtenue au moyen d'un comparateur à dents de scie, la modulation d'amplitude est réalisée à l'aide de portes analogiques à transistor à effet de champ.

Le fonctionnement et la réalisation du multiplieur sont détaillés dans l'ouvrage signalé en référence / 1 /.

L'intégrale de ces impulsions doublement modulées qui représente la somme des différents produits est réalisée à l'aide d'un intégrateur analogique ; on obtient à la fin de la séquence de N multiplications la somme des N produits soit un point de la densité spectrale ; après cette séquence l'intégrateur est remis à zéro, et une nouvelle séquence commence pour calculer le point suivant.

#### 3.2 - Fonction de pondération

Dans le cas défavorable où l'on veut analyser une densité spectrale d'une part très étendue en fréquence et d'autre part présentant des variations très fines, par exemple des pics très étroits, le pouvoir séparateur peut être insuffisant et la courbe que l'on obtient présente des oscillations parasites qui peuvent prêter à confusion.



L'application d'une fonction de pondération sur la fonction de corrélation, si elle n'accroît pas le pouvoir séparateur, a du moins l'intérêt de lisser ces oscillations parasites, on saura que tous les pics que l'on obtient correspondent à la réalité.

La fonction de pondération vaut 1 pour le premier échantillon C (0) et 0 pour le dernier C ( $\tau_M$ ) entre les deux la loi de décroissance que nous adoptons est :

$$\frac{\sin \pi \tau / \tau_M}{\pi \tau / \tau_M}$$

Ce résultat est obtenu en utilisant un atténuateur à affaiblissement variable, la progression de l'adresse des échantillons de la fonction de corrélation entraîne la progression de l'affaiblissement suivant la loi désirée.

### 3.3 - Temps de calcul approximatif

- Durée d'une multiplication : 1  $\mu$  s
- Temps de calcul d'un point de la densité spectrale : 200  $\mu$  s (si N = 200)
- Calcul de la densité spectrale : 40 ms (partie réelle uniquement)
- Eventuellement calcul d'une partie réelle et d'une partie imaginaire : 80 ms.

Manuscrit reçu le 30 octobre 1968

### - BIBLIOGRAPHIE -

- J. BENDAT, A. PIERSOL  
"Design considerations and use of Analog Power Spectral Density Analysers"  
Honeywell Denver Division (1964).
- R. BLACKMAN, J. TUKEY  
"The measurement of Power Spectra from the point of view of Communications engineering"  
Dover Publications Inc New York (1958).
- A. BLANC LAPIERRE, B. PICINBONO  
"Propriétés Statistiques du Bruit de Fond"  
Masson et Compagnie, Paris (1961).
- G. BONNET  
"Phénomènes aléatoires et traitement du signal"  
Commissariat à l'Energie Atomique B.I.S. T. n° 96, Sept. 1965.
- J. MAX  
"Les Méthodes de Corrélation dans le traitement de l'Information"  
B.I.S. T. n° 96 (Septembre 1965).  
"Les Corrélateurs en temps réel : une nouvelle génération d'appareils de mesure"  
Congrès d'Acoustique sous Marine - Nice (Avril 1967).
- J. STERN, J. DE BARBEYRAC, R. POGGI  
"Méthodes Pratiques d'étude des fonctions aléatoires"  
Dunod, Paris (1967).

REFERENCES

- 1 - Brevet n° 5 893  
D. BERTHIER, J. MAX (Avril 1966)
  
- 2 - J.L. DUFLOS  
"Etude des effets de l'échantillonnage en détection des signaux faibles"  
Cours d'été OTAN - Marine Nationale  
Grenoble (Septembre 1964).

**FIN**