



Modelo del Movimiento de una Partícula Cargada en un Plasma Durante la Interacción de un Pulso Electromagnético Elípticamente Polarizado Propagándose en la Dirección de un Campo Magnético Estático y Homogéneo

¹*Gómez Ramírez Fernando. y ²Ondarza Rovira Ricardo .*

¹*Universidad Autónoma del Estado de México
Facultad de Ciencias*

Piedras Blancas, A.P. 2-139, Toluca 50000, Edo. México., México

²*Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares
Departamento de Física*

A.P. 18-1027, México 11801, D.F., México

Resumen

Se presenta un modelo analítico para la descripción del movimiento de una partícula cargada en la interacción de un pulso electromagnético elípticamente polarizado propagándose a lo largo de un campo magnético externo estático y homogéneo en un plasma a partir de la ecuación de fuerza. El método permite expresar la solución en términos de la fase invariante, obteniendo ecuaciones diferenciales para la trayectoria de la partícula acelerada por medio de un pulso electromagnético de amplitud arbitraria y modulada por una envolvente Gaussiana. Las soluciones numéricas reportadas en este trabajo pueden encontrar variadas aplicaciones, por ejemplo en la física de la interacción láser-plasma, en la aceleración de partículas, en plasmas calientes y en efectos radiativos.

1. INTRODUCCIÓN

El plasma, en el caso más general, puede considerarse una mezcla de tres componentes: electrones libres, iones positivos y átomos neutros. Este es el estado de la materia más abundante en la naturaleza. Como ejemplo, se tiene el sol y las estrellas que pueden ser considerados grandes cúmulos de plasma caliente. Por otra parte, la superficie exterior de la atmósfera terrestre está recubierta por una capa de plasma, la ionosfera y las zonas de radiación ubicadas en el espacio circunferrestre tras la ionosfera son formaciones de este estado enrarecido de la materia. Además, toda descarga gaseosa (relámpago, chispa, arco, etc.) está ligada a la formación del plasma. Por ello, en las condiciones terrestres naturales, en los laboratorios, en la técnica y ante cualquier tipo de descarga gaseosa nos hallamos en presencia de un plasma. Las perspectivas del empleo práctico del plasma fueron siempre el estímulo fundamental para el desarrollo de esta rama de la física. Si bien el plasma despertó el interés de los físicos como tipo especial de conductor de corriente y como fuente de luz, actualmente los nuevos métodos de encarar el estudio de su comportamiento van ligados a los grandes problemas tecnológicos de nuestros días, que tienen como fundamento científico la física del plasma.

La investigación de los fenómenos que se producen en el plasma presenta interés no sólo en relación con sus diferentes aplicaciones prácticas. El plasma es un medio material, formado por un conjunto de partículas en interacción recíproca entre sí según las leyes de la electrodinámica. La tarea de la física consiste en explicar el mecanismo de aquellos procesos que pueden producirse en este medio, partiendo de la microestructura conocida del plasma. Aquí, nos encontramos por completo dentro de los marcos de la física clásica ya que en el plasma común los efectos cuánticos prácticamente no juegan papel importante. No obstante, el programa del análisis teórico de los procesos en el plasma hasta el presente ha sido cumplido sólo en una medida parcial, quedando en él muchos temas por investigar.

2. CONCEPTO DE PLASMA

Precisemos ahora la definición de plasma dada anteriormente.

Las fuerzas eléctricas, producto de las cargas de signos contrarios en un plasma, mantienen una cuasineutralidad, es decir, una concentración igual de electrones e iones. Toda separación de las cargas, determinada por el desplazamiento de un grupo de electrones con respecto a los iones, debe llevar a la aparición de campos eléctricos que tienden a compensar la excitación creada. Con el aumento de la concentración de las partículas estos campos crecen, pudiendo alcanzar magnitudes muy grandes en el caso del plasma denso. Entre las propiedades principales del plasma se encuentra que presentan

1. Una fuerte interacción con los campos magnéticos y eléctricos externos, debida a su gran conductibilidad eléctrica.
2. Una interacción colectiva de sus partículas.
3. En virtud de las interacciones remotas, el plasma es un medio elástico peculiar en el cual se excitan y propagan fácilmente oscilaciones y ondas de distinto tipo

Las pequeñas oscilaciones libres de los electrones en el plasma, son generadas por las fuerzas del campo eléctrico que aparecen en el plasma eléctricamente neutro cuando se produce cualquier desviación casual de la distribución espacial de los electrones respecto a la del equilibrio. Por ejemplo, si en una capa plana de espesor l se desplazan los electrones, una pequeña distancia s a lo largo del sentido positivo del eje OX , su proyección sobre ese eje es:

$$E_x = 4\pi n_0 e s,$$

donde n_0 es la concentración de electrones en el plasma y e , la magnitud absoluta de la carga del electrón. Según la Segunda Ley de Newton, un modelo simple para la ecuación del movimiento de los electrones del plasma en este campo eléctrico tiene la forma:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -e E_x = -4\pi e^2 n_0 s, \quad (1)$$

entonces:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 4\pi e^2 \frac{n_0}{m} s = 0, \quad (2)$$

donde m es la masa del electrón. Por lo tanto, los electrones del plasma efectúan oscilaciones armónicas de frecuencia:

$$\omega_p = e\sqrt{4\pi \frac{n_0}{m}}, \quad (3)$$

que recibe el nombre de *frecuencia de plasma o de Langmuir*.

2.1. Simulación Numérica de la Dinámica Relativista del Electrón en Plasmas

En esta sección estudiaremos la generalización de la teoría analítica descrita en la sección anterior.

Para plasmas densos, el movimiento de los electrones produce fuertes interacciones que modifican tanto la dinámica del electrón, como la propagación del campo electromagnético. Estos efectos pueden ser analizados por medio de simulaciones de muchas partículas. No obstante, estudios recientes [1,2] sugieren que los datos obtenidos mediante simulaciones de muchos electrones es muy difícil de interpretar. Así, creemos conveniente y útil realizar simulaciones en las cuales intervenga una sola partícula, en donde los efectos del espacio-carga son representados por medio de un potencial vectorial y donde los efectos del movimiento del electrón sobre la propagación del láser son despreciados. Lo anterior será descrito en la siguiente sección. En estos cálculos compararemos nuestros resultados con aquellos reportados por Bardsley y otros [1-6].

Para la realización de los cálculos utilizamos unidades atómicas, las que permiten de forma adecuada simplificar el trabajo de cómputo (ver cuadros 1 y 2).

Electromagnéticas		
Magnitud	a.u.	CGS
Campo Eléc. E	1 au	$17,151936 \times 10^6 \text{ statvolts/cm}$
Campo Mag. B	1 au	$17,151936 \times 10^6 \text{ gauss}$
Pot. Vect. A	1 au	$9,0766 \times 10^{-2} \text{ gauss-cm}$
Frec. Cincrotrónica α	$7,2972 \times 10^{-2} \text{ au}$	$3016,6641 \times 10^{12} \text{ Hz}$
c vel. de la Luz	137,04 au,	$2,9979 \times 10^8 \text{ cm/seg}$

Cuadro 1: Factores de Escala Electromagnéticos en Unidades Atómicas

Magnitud	a.u.	CGS
Fundamentales		
tiempo	1 au	$2,42 \times 10^{-17} \text{ seg}$
distancia	1 au	$5,29 \times 10^{-9} \text{ cm}$
masa	1 au	$9,11 \times 10^{-28} \text{ gr}$
Dinámicas		
Velocidad	1 au	$218,7651 \times 10^6 \text{ cm/seg}$
Aceleración	1 au	$9,044 \times 10^{24} \text{ cm}^2/\text{seg}$
Fuerza	1 au	$8,238 \times 10^{-3} \text{ dinas}$

Cuadro 2: Factores de Escala Fundamentales en Unidades Atómicas

3. UN MODELO SIMPLE DE LAS FUERZAS ESPACIO-CARGA

La radiación de un pulso de luz láser intenso impulsa a los electrones libres con altas velocidades en la dirección de propagación de la fuente de radiación. En un plasma denso esto conduce a una separación de la carga y al desarrollo de fuerzas electrostáticas que pueden causar efectos significantes en la dinámica del electrón. Bardsley *et all* [2] propusieron un modelo simple para este efecto utilizando una aproximación de pulso de onda plana, añadiendo una fuerza restauradora armónica en la dirección de propagación del láser:

$$\mathbf{F} = -m\omega_p^2 \mathbf{x}$$

dada por la Ec. (3), donde ω_p es la *frecuencia de plasma*.

Los resultados presentados en esta sección fueron obtenidos integrando numéricamente la ecuación relativista de Newton-Lorentz.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_{0x}) - m\omega_p^2 \mathbf{x}. \quad (4)$$

Donde B_{0x} es un campo magnético estático y homogéneo en la dirección de propagación. Los campos están descritos por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{c \partial t}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

donde:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = a(\eta) \mathbf{A}(\eta),$$

y

$$\mathbf{A}(\eta) = A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \delta)^{\frac{1}{2}} \sin \eta \\ \delta \cos \eta \end{pmatrix},$$

$a\eta$ es el factor de forma y $\eta=(t-x/c)$ es la fase invariante de de Lorentz, la polarización está dada por el parámetro:

$$\delta = \begin{cases} 0, \pm 1 & \text{polarización lineal} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{polarización circular.} \end{cases}$$

La integración se realizó utilizando el método de Runge-Kutta a cuarto orden. El código fue examinado fijando $\omega_p=0$ y comparando contra las predicciones de la solución analítica [1].

Fue necesario realizar algunos cálculos analíticos útiles para la interpretación de los resultados. Partiendo de la ecuación de fuerza (4) se obtiene, después de sustituir las expresiones de los campos y de simplificar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e\omega}{c} \begin{pmatrix} \frac{v_y}{c} \frac{dA_y}{d\eta} + \frac{v_z}{c} \frac{dA_z}{d\eta} \\ (1 - \frac{v_x}{c}) \frac{dA_y}{d\eta} \\ (1 - \frac{v_x}{c}) \frac{dA_z}{d\eta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_0 \omega_p^2 x \\ \frac{v_x}{c} B_{0x} \\ -\frac{v_y}{c} B_{0x} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

A partir de la expresión para la energía:

$$\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

y derivando respecto a t se obtiene:

$$2\mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = m_0 \gamma c^2 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

de donde:

$$\frac{d(c\gamma)}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Al sustituir los campos se obtiene:

$$\frac{d(c\gamma)}{dt} = -\frac{e\omega}{m_0 c^2} \left(v_y \frac{dA_y}{d\eta} + v_z \frac{dA_z}{d\eta} \right) - \frac{\omega_p^2}{c} v_x x. \quad (6)$$

Las expresiones para las componentes de los momentos p_y y p_z se obtienen derivando respecto al tiempo la fase η , la cual al sustituirla en la Ec. (6) e integrando respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} p_y &= -\frac{e A_0}{c} (1 - \delta^2)^{1/2} a \sin \eta \\ &\quad + \frac{e}{c} B_{0x} z \\ &= -\frac{e}{c} A_y + \frac{e}{c} B_{0x} z, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p_z &= -\frac{e A_0}{c} \delta a \sin \eta - \frac{e}{c} B_{0x} y \\ &= -\frac{e}{c} A_z - \frac{e}{c} B_{0x} y, \end{aligned} \quad (8)$$

de donde:

$$v_y = -\frac{e}{m_0 \gamma c} A_y + \frac{e}{m_0 \gamma c} B_{0x} z, \quad (9)$$

$$v_z = -\frac{e}{m_0 \gamma c} A_z - \frac{e}{m_0 \gamma c} B_{0x} y. \quad (10)$$

En el caso de $\omega_p=0$ y $B_{0x}=0$, los momentos p_y y p_z coinciden con la predicción analítica de Sarachik-Schappert [1].

Dividiendo la componente x de la Ec.(5) por m_0 y substrayendo la Ec. (6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma v_x - c\gamma) &= \frac{\omega_p^2}{c^2} v_x x - \omega_p^2 x \\ &= -\frac{\omega_p^2}{\omega} x \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned} \quad (11)$$

Integrando respecto al tiempo y simplificando se llega a la expresión:

$$\gamma c \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) - c = \frac{\omega_p^2}{\omega} \int_0^x x d\eta. \quad (12)$$

Despejando v_x y sustituyendo en $d\eta/dt(1-vx/c)$ se obtiene:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^x x d\eta + 1 \right). \quad (17)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\frac{d\eta}{dt} = \omega \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) = \omega \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dx}{d\eta} \frac{d\eta}{dt}\right). \quad (18)$$

Despejando $dx/d\eta$ se llega a:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\omega}{\left(1 + \frac{\omega}{c} \frac{dx}{d\eta}\right)}, \quad (19)$$

igualando la Ec. (19) con (17) y despejando γ se tiene

$$\gamma = \left(1 + \frac{\omega}{c} \frac{dx}{d\eta}\right) \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^x x d\eta + 1\right). \quad (20)$$

Cuando $\omega_p=0$, se recupera a Ondarza [4], entonces

$$\mathcal{E} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\omega}{c} \frac{dx}{d\eta} \right) \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^x x d\eta + 1 \right). \quad (21)$$

Para obtener una expresión analítica para el momento p_x , se usa la Ec. (17), entonces

$$\begin{aligned} p_x &= m_0 \gamma \frac{d\eta}{dt} \frac{dx}{d\eta} \\ &= m_0 \omega \frac{dx}{d\eta} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^x x d\eta + 1 \right). \quad (22) \end{aligned}$$

Sustituyendo la Ec. (22) en la (21) se tiene que:

$$\mathcal{E} = m_0 c^2 \left\{ \frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^x x d\eta + \frac{p_x}{m_0 c} + 1 \right\}. \quad (23)$$

Por otro lado, de la expresión de la energía

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &= \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (24) \\ m_0^2 \gamma^2 c^4 &= m_0^2 \gamma^2 \mathbf{v}^2 c^2 + m_0^2 c^4, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} c^2 \gamma^2 - c^2 &= \gamma^2 \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \\ &\times \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las Ecs. (17) y (20), despejando y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(1 + 2 \frac{\omega}{c} \frac{dx}{d\eta} \right) \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^x x d\eta + 1 \right)^2 - 1 &= \\ \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^x x d\eta + 1 \right)^2 \left\{ \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

despejando se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= \frac{\omega}{2c} \left\{ \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta} \right)^2 \right\} \\ &+ \frac{c}{2\omega} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1 \right)^{-2} - \frac{c}{2\omega}. \quad (26) \end{aligned}$$

Se puede observar que cuando $\omega_p=0$, se obtiene la expresión reportada por Ondarza [4]. Por otro lado, de las Ecs. (7-9), (10) y (17) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\eta} &= -\left(\frac{e}{m_0 \omega c} A_y - \frac{e}{m_0 \omega c} B_{0x} z\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1\right)^{-1} \\ &= \frac{p_y}{m_0 \omega} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1\right)^{-1}. \quad (27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\eta} &= -\left(\frac{e}{m_0 \omega c} A_z + \frac{e}{m_0 \omega c} B_{0x} y\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1\right)^{-1} \\ &= \frac{p_z}{m_0 \omega} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1\right)^{-1}. \quad (28)\end{aligned}$$

Si $B_{0x}=0$, sustituyendo las Ecs. (27), (28) en la Ec. (26) se obtiene:

$$\left(1 + 2\frac{\omega}{c} \frac{dx}{d\eta}\right) \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1\right)^2 = \frac{e^2}{m_0^2 c^4} \mathbf{A}^2 + 1. \quad (29)$$

Cuando $\omega_p \approx 0$ se tiene que:

$$x = \int_0^\eta \frac{e^2}{m_0^2 c^4} \mathbf{A}^2 d\eta,$$

con lo que se recupera a Sarachik-Schappert [1].

Despejando $dx/d\eta$ de la Ec. (29) y sustituyendo en la Ec. (22) y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}p_x &= m_0 \frac{c}{2} \left(\frac{e^2}{m_0^2 c^4} \mathbf{A}^2 + 1\right) \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1\right)^{-1} \\ &\quad - m_0 \frac{c}{2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega c} \int_0^\eta x d\eta + 1\right). \quad (30)\end{aligned}$$

Nuevamente, cuando $\omega_p=0$ se obtiene la solución de Sarachik-Schappert [1] para el momento p_x .

4. CONCLUSIONES

El modelo introducido en la sección anterior es tridimensional, pero en este caso sólo analizaremos el caso de polarización lineal, no obstante, para muchas situaciones las observaciones pueden aplicarse al caso de polarización circular y elíptica. De esta forma, se supondrá $\delta=0$, que indica que la componente $E_z=0$. Se ha supuesto que el electrón se encuentra inicialmente en reposo, con amplitud máxima de campo de 100 u.a. (5.14×10^{11} V/cm), correspondiente a una intensidad de 3.5×10^{20} W/cm² y a una frecuencia $\omega=0.18$ u.a., para un láser Kr-F (se usa esta frecuencia a lo largo de esta sección. En el caso de un campo magnético externo se empleará una magnitud $B_{0x}=5.756 \times 10^{-3}$ u.a. = 10^4 Gauss.

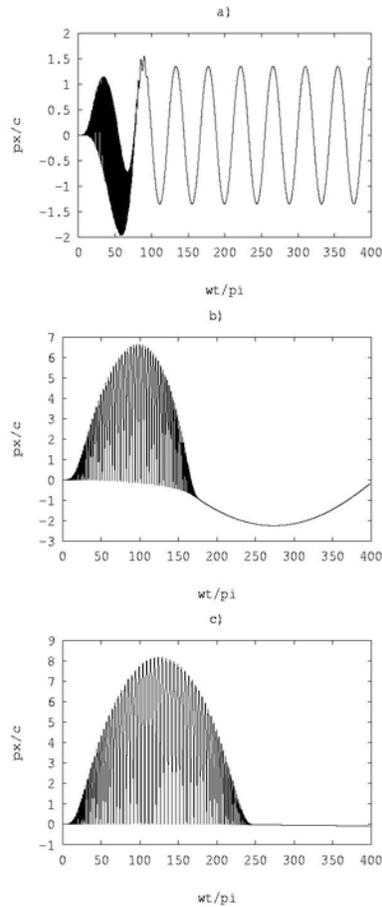


Figura 1: Momento residual para un pulso $N = 100$, a) $\omega_p = 0,01$, b) $\omega_p = 0,001$ y c) $\omega_p = 0,0001$

De las Ecs. (7) y (8), se observa que cuando $B_{0x}=0$ y $\omega_p=0$ los momentos transversales coinciden con aquellos de Sarachik y Schappert [1], En cambio, cuando ω_p es diferente de cero los momentos p_y y p_z sólo dependen de η . Como estas ecuaciones son generales, los efectos de la

respuesta del plasma deben estar contenidos en la solución para x y por lo tanto se esperan variaciones en la fase y la forma del pulso. Cuando se agrega un campo magnético externo en el caso de polarización lineal se observa con claridad que el efecto del campo es proporcional a la posición, de acuerdo con las Ecs. (7) y (8).

Para el caso de un tren de ondas los resultados concuerdan perfectamente con las predicciones de Sarachik y Schappert [1] y la predicción teórica, de Ondarza [4] alcanzando una energía máxima de 4.7 MeV, en las Ecs. (7), y (8). Se puede apreciar en las Ecs. (7) y (8) como el efecto del campo magnético es proporcional a la posición en la dirección y , esta predicción se repite en todas las polarizaciones. El efecto del campo magnético en el caso de láseres intensos es tan pequeño que no se presenta un efecto apreciable para el resto de las componentes.

AGRADECIMIENTOS

Uno de los autores (FGR) agradece el apoyo del CONACyT bajo proyecto 33251-E.

REFERENCIAS

- [1] E.S. Sarachik and G. T. Schappert, "Classical Theory of Electrons of intense Laser Radiation by Free Electrons.", *Phys. Rev. D* **1**, 2738 (1970).
- [2] J. N. Bardsley B. M. Penetrante and M. H. Mittleman, "Relativistic Dynamics of Electrons in intense Lasser Fields.", *Phys. Rev. A* **40**, 3823 (1989).
- [3] B.-L. Qian, "Relativistic motion of a charged particle in a superposition of circularly polarized plane electromagnetic waves and a uniform magnetic field", *Phys. Plasmas*, vol. **7**, no. 2, pp. 537-543 (2000).
- [4] R. Ondarza-Rovira, "Relativistic Motion of a charged particle driven by an elliptically polarized electromagnetic wave propagating along a static magnetic field", *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol.29, no. 6, pp. 903-906 (2001).
- [5] Bourdier and S. Gond, "Dynamics of a charged particle in a circularly polarized travelling electromagnetic wave", *Phys. Rev. E*, vol. **62**, no. 3, pp. 4189-4206 (2000).
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. Oxford, U.K.: Pergamon, 1962