

CNIC-01683
IAPCM-0029

R-M 不稳定性数值模拟方法
NUMERICAL SIMULATION METHODS TO
RICHTMYER-MESHKOV INSTABILITIES
(In Chinese)

中国核情报中心
China Nuclear Information Centre

CNIC-01683
IAPCM-0029

R-M 不稳定性数值模拟方法

赵宁 余彦 唐维军
(北京应用物理与计算数学研究所, 100088)

摘 要

通常, 界面追踪方法都是由界面将计算区域分割为多个部分来分别处理, 同时用求解黎曼问题来追踪全部波系的发展。然而在高维情况下, 波系间相互作用的黎曼问题将非常复杂且目前尚处于分析阶段, 故在实际应用中只能追踪界面本身。提出了一种新的界面追踪方法, 该方法只追踪界面的发展而不再追踪波系, 使计算量和复杂性大大减少并保持了原界面追踪方法精确捕捉界面的特点, 数值结果令人满意。

关键词: 界面追踪 黎曼解 高分辨 MmB 格式 强波探测开关
分类号: TL632; TL612.2

Numerical Simulation Methods to Richtmyer-Meshkov Instabilities

(In Chinese)

ZHAO Ning YU Yan TANG Weijun
(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, 100088)

ABSTRACT

Front tracking algorithms have generally assumed that the computational medium is divided into piece-wise smooth subdomains bounded by interfaces and that strong wave interactions are solved via Riemann solutions. However, in multi-dimensional cases, the Riemann solution of multiple shock wave interactions are far more complicated and still subject to analytical study. For this reason, it is very desirable to be able to track contact discontinuities only. A new numerical algorithm to couple a tracked contact surface and an untracked strong shock wave are described. The new tracking algorithm reduces the complication of computation, and maintains the sharp resolution of the contact surface. The numerical results are good.

Key words: Front tracking, Riemann solver, High resolution MmB scheme, Limiter switch

Category: TL632; TL612.2

引言

受扰动的两种轻重流体的交界面，当处于方向由重流体指向轻流体的有效重力场或受到冲击波作用时扰动将发展，界面失稳，两种物质发生湍流混合。重力场作用下的不稳定性，人们常称为 Rayleigh-Taylor (简称 R-T) 不稳定性，激波作用下的界面不稳定性，则常称为 Richtmyer-Meshkov (简称 R-M) 不稳定性。在惯性约束核聚变 (ICF) 中，由于 R-T 和 R-M 不稳定性的作用，将影响到氘氚气体的内爆压缩、升温、点火和燃烧^[1]。

界面不稳定性的研究因其应用背景和学术价值在近二十多年受到极大的重视，所以国外对此做了大量的研究。在界面不稳定性的数值研究中，最核心的当是运动界面的精确描述，正是由于这一需要使得界面追踪 (Front Tracking, 简称 FT) 方法得以充分发展。美国数学物理学家 James Glimm 及其领导的研究小组从 20 世纪 80 年代初开始将 FT 方法发展并应用于模拟流体界面不稳定性，自 80 年代中期以来，他们已经对该类方法的理论和应用的诸多方面进行了深入研究^[2~5]。由于该类方法是以数学方程的物理解的性质为基础，其最大特点是能够精确地捕捉到界面的发展，而不会出现非物理解的现象。另外一种捕捉界面的方法是 Level Set 方法^[6]。

本文首先发展了一种新的一维无振荡界面追踪方法 (只追踪界面的发展而不再追踪波系)，从而使计算量和复杂性大大减少并保持了原界面追踪方法精确捕捉界面的特点，进而将该方法推广到二维问题数值模拟中，提出了二维问题的实施方案，并对于一维和二维问题给出了数值计算实例，计算结果令人满意。

1 一维数值方法

界面不稳定问题只存在于多维问题之中，为了能使在一维问题中发展的方法可以出色地模拟多维界面问题，就要求该一维方法具有精确的捕捉界面的能力。为此，本文首先研究的一维问题是模拟一个管道中两种不同流体之间界面在激波作用下的发展情况。原 FT 方法的数值结果虽然比较好，但由于它要求追踪所有的波系和界面的发展，使得算法的计算量很大。本文中，发展了一种新的无振荡 FT 方法，这种新方法的重大特点是它只追踪界面的发展而不再追踪波系。下面将对这种新方法作出具体介绍。

考虑一维欧拉方程 (理想气体)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\rho E + p))}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right)$ 为压强, ρ 为流体密度, u 为速度, E 为单位质量的总能, 两种流体的 γ 值可互不相同。

不失一般性, 我们在作时间推进时使用 Harten^[7] 的具有二阶精度的 TVD 格式, 若选用其他高分辨、无振荡差分格式 (如 MUSCL 格式) 并不影响界面的捕捉, 而且计算结果与之接近。此处选用 Harten 格式仅为对本文方法加以说明。将方程 (1) 写成守恒形式如下

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$U = (u_1, u_2, u_3)^T$, $F(U) = (f_1(U), f_2(U), f_3(U))^T$, 通量 $F(U)$ 的雅可比矩阵 A 可分解为

$$A = \frac{\partial F(U)}{\partial U} = RAL \quad (3)$$

其中 L 和 R 分别为左右特征矩阵, A 为由 A 的特征值 $a^1(u), \dots, a^3(u)$ 所组成的对角矩阵。则格式为下面式 (4) 至 (9) 所示:

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \lambda \left(\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n \right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{j+1/2} &= |f(v_j) + f(v_{j+1})|/2 \\ &+ \sum_{k=1}^m R_{j+1/2}^k [g_j^k + g_{j+1}^k - Q^k(v_{j+1/2}^k + \gamma_{j+1/2}^k) \alpha_{j+1/2}^k] / 2\lambda \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $v_{j+1/2}^k = \lambda a^k(v_{j+1/2})$ 及

$$g_j^k = s_{j+1/2}^k \max \left[0, \min \left(\tilde{g}_{j+1/2}^k, \tilde{g}_{j-1/2}^k s_{j+1/2}^k \right) \right], s_{j+1/2}^k = \text{sgn}(\tilde{g}_{j+1/2}^k) \quad (6)$$

$$\tilde{g}_{j+1/2}^k = \left| Q^k(v_{j+1/2}^k) - (v_{j+1/2}^k)^2 \right| \alpha_{j+1/2}^k / 2 \quad (7)$$

$$\gamma_{j+1/2}^k = (g_{j+1}^k - g_j^k) / \alpha_{j+1/2}^k \quad \alpha_{j+1/2}^k \neq 0 \quad (8)$$

$$\gamma_{j+1/2}^k = 0 \quad \alpha_{j+1/2}^k = 0$$

$$Q(x) = (x^2/4\varepsilon) + \varepsilon \quad |x| < 2\varepsilon \quad (9)$$

$$Q(x) = |x| \quad |x| \geq 2\varepsilon$$

定义 $0 < \varepsilon \leq 0.5$, 一般取 $\varepsilon = 0.1$ 。

新的 FT 方法可以划分为四个步骤。在 t 时刻, 假设界面位于 x_i 及 x_{i+1} 两点之间, 界面左右两边的流体状态分别为 S_{l2} 和 S_{r2} 。

● 首先, 我们将界面看作一个边界, 对其左右两种不同的流体之状态分别用上面所给出

的 TVD 格式进行时间推进到 $t + \Delta t$ 时刻。除靠近界面的 x_i 及 x_{i+1} 两点外，其余的各点均要作推进。

● 第二步，如图 1 所示，根据界面两边的状态 S_{l2} 及 S_{r2} ，我们可以得到界面的移动速度，而由此速度便可以确定出界面在 $t + \Delta t$ 时刻的新位置。

从这个新位置引两条特征线（斜率分别为 $\frac{dx}{dt} = u + c$ 及 $\frac{dx}{dt} = u - c$ ）。

● 第三步，在界面的两侧分别向外延伸 Δx （ Δx 为网格划分时 x 轴上两点间距），得两点 x_l^1 及 x_r^1 ，其在图 1 上的状态为 S_l^1 和 S_r^1 。事实上，在一维问题中不必如此去选取 x_l^1 及 x_r^1 ，只需要利用已有的网格节点处的值即可。但对于多维问题，此处对应的是界面的法线方向，我们将无法直接得到该方向上节点处的值，而只能利用上述的方法来得到 x_l^1 及 x_r^1 。为获得具有高精度的 S_l^1 和 S_r^1 值，设由该点左右两网格点处状态的插值作为该点的状态值。但这一做法如果考虑的是激波正在接近界面（事实上在数值计算中激波并不是象我们想象的那样，一步就与界面作用并穿过），则此线性插值虽然满足了数学上的精度，但与物理现象是不符合的。为此，引入限制器算法。若激波正在通过该点所在的网格，则限制器状态设为开，将波后状态值赋给该点；若激波未通过该网格，则限制器状态设为关，状态值由插值得到。同样，在由 S_l^1 和 S_{l2} 求 S_{l3} 的值，由 S_r^1 和 S_{r2} 求 S_{r1} 的值的时候，我们也引入相同的限制器。下面将介绍两种不同的限制器，它们均以不同形式表示状态间存在强间断，其使用效果将在后面给出并对其进行了比较。

特征线与 t 时刻的坐标线交于 x_{l3} 和 x_{r1} 两点，此两点的状态为 S_{l3} 和 S_{r1} （待定）。

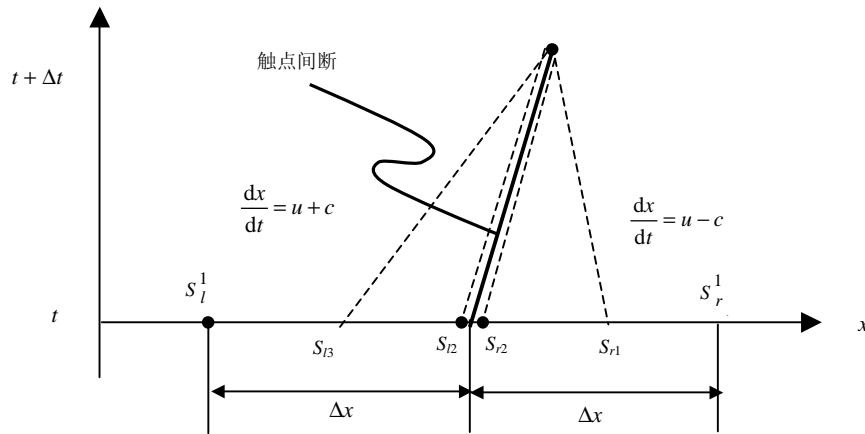


图 1 算法示意图

限制器一：

$$\text{switch} = \begin{cases} \text{on} & |p_2 - p_1| > \alpha \cdot |u_2 - u_1| \cdot \rho_1 \cdot a_1 \quad \text{or} \quad |p_2 - p_1| > \alpha \cdot |u_2 - u_1| \cdot \rho_2 \cdot a_1 \\ \text{off} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

式中 α 为一待定参数，在本文计算的几个算例中其值为 0.4 可达到最佳效果。 a 为音速，下标 1 和 2 表示待求点的左右两点。

限制器二:

$$\text{switch} = \begin{cases} \text{on} & \frac{p_2}{p_1} > \alpha \cdot \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \text{ or } \frac{p_1}{p_2} > \alpha \cdot \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \\ \text{off} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

式中 $M_1 = (u_1 + u_2)/(2 \cdot a_1)$, 作为近似的激波马赫数, α 同上亦为待定参数, 其值取 0.5 最为合适。

● 最后, 用 S_{i3} 及 S_{i1} 值通过求解黎曼精确解, 得到界面两侧的状态, 并将此状态值分别赋给 x_i 和 x_{i+1} 点。

至此, $t + \Delta t$ 时刻所有网格点的值都已经赋新, 即已完成了一次时间推进。然后, 重复以上四个步骤, 直至 Δt 的累和达到给定的时刻 t 结束计算。

2 一类二维高分辨 MmB 差分格式

针对二维问题的数值模拟, 我们在对计算区域 (界面除外) 进行时间推进时, 采用一类具有时空二阶精度高分辨的 MmB 差分格式^[8]。此类格式是直接由二维非线性双曲型守恒定律出发, 以交错形式 Lax-Friedrichs 格式为基本模块, 使用二阶分片线性逼近代替一阶分片常数逼近, 减少了 Lax-Friedrichs 格式的过多数值粘性, 通过对混合导数离散形式的适当处理而构造得到的。

考虑如下二维双曲型守恒定律初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (12)$$

所谓 MmB 差分格式是指, 给定 (12) 的差分格式

$$u_h(p) = L_h u_h(\Omega_h^n), \quad p \in \Omega_h^{n+1} \quad (13)$$

若有

$$\min_{1 \leq j \leq s(p)} u_h(p_j) \leq u_h(p) \leq \max_{1 \leq j \leq s(p)} u_h(p_j) \quad (14)$$

则称公式 (13) 为 MmB 差分格式。MmB 表示局部极大极小有界 (Maximum and minimum Bounds)。

对于守恒定律方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

雅克比矩阵为 $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial f^p}{\partial u_q} \right)_{m \times m}$, $\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial g^p}{\partial u_q} \right)_{m \times m}$, $p, q = 1, 2, \dots, m$

本文所采用的 MmB 差分格式为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(t+\Delta t) &= \frac{1}{4}[\mathbf{V}_{j,k}(t) + \mathbf{V}_{j,k+1}(t) + \mathbf{V}_{j+1,k}(t) + \mathbf{V}_{j+1,k+1}(t)] \\ &\quad - \lambda \cdot [\mathbf{F}_{j+1,k+1} + \mathbf{F}_{j+1,k} - \mathbf{F}_{j,k+1} - \mathbf{F}_{j,k}] \\ &\quad - \mu \cdot [\mathbf{G}_{j+1,k+1} + \mathbf{G}_{j,k+1} - \mathbf{G}_{j+1,k} - \mathbf{G}_{j,k}] \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{F}_{j,k} = \frac{1}{2} \mathbf{f} \left[\mathbf{V}_{j,k} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] + \frac{1}{16\lambda} \mathbf{V}'_{j,k} \quad (17a)$$

$$\mathbf{G}_{j,k} = \frac{1}{2} \mathbf{g} \left[\mathbf{V}_{j,k} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] + \frac{1}{16\mu} \mathbf{W}'_{j,k} \quad (17b)$$

$$\mathbf{V}_{j,k} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \mathbf{V}_{j,k}(t) - \frac{\lambda}{2} \mathbf{f}'_{j,k} - \frac{\mu}{2} \mathbf{g}'_{j,k} \quad (18)$$

数值导数 $\frac{1}{\Delta x} \mathbf{V}'_{j,k}$, $\frac{1}{\Delta y} \mathbf{W}'_{j,k}$, $\frac{1}{\Delta x} \mathbf{f}'_{j,k}$, $\frac{1}{\Delta y} \mathbf{g}'_{j,k}$ 按特征变量方法选取。

引入 Roe 平均的概念, 即 $\mathbf{A}_{j+\frac{1}{2},k} = \mathbf{A}(\mathbf{V}_{j,k}, \mathbf{V}_{j+1,k})$, $\mathbf{B}_{j,k+\frac{1}{2}} = \mathbf{B}(\mathbf{V}_{j,k}, \mathbf{V}_{j,k+1})$, 使

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{V}_{j+1,k}) - \mathbf{f}(\mathbf{V}_{j,k}) &= \mathbf{A}_{j+\frac{1}{2},k} \cdot (\mathbf{V}_{j+1,k} - \mathbf{V}_{j,k}); \\ \mathbf{g}(\mathbf{V}_{j,k+1}) - \mathbf{g}(\mathbf{V}_{j,k}) &= \mathbf{B}_{j,k+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{V}_{j,k+1} - \mathbf{V}_{j,k}). \end{aligned}$$

设 $\mathbf{A}_{j+\frac{1}{2},k}$ 和 $\mathbf{B}_{j,k+\frac{1}{2}}$ 分别有完备的特征向量系:

$$\left\{ \hat{\mathbf{a}}^l_{j+\frac{1}{2},k}, \hat{\mathbf{R}}^l_{j+\frac{1}{2},k} \right\}, \left\{ \hat{\mathbf{b}}^l_{j,k+\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{S}}^l_{j,k+\frac{1}{2}} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

则

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V}_{j+\frac{1}{2},k} &= \sum_{l=1}^m \hat{\alpha}^l_{j+\frac{1}{2},k} \cdot \hat{\mathbf{R}}^l_{j+\frac{1}{2},k}, \Delta \mathbf{V}_{j,k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^m \hat{\beta}^l_{j,k+\frac{1}{2}} \cdot \hat{\mathbf{S}}^l_{j,k+\frac{1}{2}} \\ \Delta \mathbf{f}_{j+\frac{1}{2},k} &= \sum_{l=1}^m \hat{\alpha}^l_{j+\frac{1}{2},k} \cdot \hat{\mathbf{a}}^l_{j+\frac{1}{2},k} \cdot \hat{\mathbf{R}}^l_{j+\frac{1}{2},k}, \Delta \mathbf{g}_{j,k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^m \hat{\beta}^l_{j,k+\frac{1}{2}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^l_{j,k+\frac{1}{2}} \cdot \hat{\mathbf{S}}^l_{j,k+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

选取 $\mathbf{V}'_{j,k}$, $\mathbf{W}'_{j,k}$ 如下:

$$\mathbf{V}'_{j,k} = \sum_{l=1}^m \mathbf{M} \mathbf{M} \left(\alpha \cdot \hat{\alpha}^l_{j+\frac{1}{2},k}, \frac{1}{2} \left(\hat{\alpha}^l_{j+\frac{1}{2},k} + \hat{\alpha}^l_{j-\frac{1}{2},k} \right), \alpha \cdot \hat{\alpha}^l_{j-\frac{1}{2},k} \right) \cdot \hat{\mathbf{R}}^l_{j,k} \quad (19a)$$

$$\mathbf{w}'_{j,k} = \sum_{l=1}^m MM \left(\alpha \cdot \hat{\beta}'_{j,k+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \left(\hat{\beta}'_{j,k+\frac{1}{2}} + \hat{\beta}'_{j,k-\frac{1}{2}} \right), \alpha \cdot \hat{\beta}'_{j,k-\frac{1}{2}} \right) \cdot \hat{S}'_{j,k} \quad (19b)$$

选取 $\mathbf{f}'_{j,k}$, $\mathbf{g}'_{j,k}$ 如下:

$$\mathbf{f}'_{j,k} = \sum_{l=1}^m MM \left(\alpha \cdot \hat{\alpha}'_{j+\frac{1}{2},k} \cdot \hat{a}'_{j+\frac{1}{2},k}, \alpha \cdot \hat{\alpha}'_{j-\frac{1}{2},k} \cdot \hat{a}'_{j-\frac{1}{2},k}, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\hat{\alpha}'_{j+\frac{1}{2},k} \cdot \hat{a}'_{j+\frac{1}{2},k} + \hat{\alpha}'_{j-\frac{1}{2},k} \cdot \hat{a}'_{j-\frac{1}{2},k} \right) \right) \cdot \hat{R}'_{j,k} \quad (19c)$$

$$\mathbf{g}'_{j,k} = \sum_{l=1}^m MM \left(\alpha \cdot \hat{\beta}'_{j,k+\frac{1}{2}} \cdot \hat{b}'_{j,k+\frac{1}{2}}, \alpha \cdot \hat{\beta}'_{j,k-\frac{1}{2}} \cdot \hat{b}'_{j,k-\frac{1}{2}}, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\hat{\beta}'_{j,k+\frac{1}{2}} \cdot \hat{b}'_{j,k+\frac{1}{2}} + \hat{\beta}'_{j,k-\frac{1}{2}} \cdot \hat{b}'_{j,k-\frac{1}{2}} \right) \right) \cdot \hat{S}'_{j,k} \quad (19d)$$

$$MM(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{cases} S \cdot \min(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|), & \text{Sgn}(x_1) = \text{Sgn}(x_2) = \dots = \text{Sgn}(x_m) = S \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\hat{R}'_{j,k}$ 和 $\hat{S}'_{j,k}$ 分别表示 $\hat{R}'_{j+\frac{1}{2},k}$ 与 $\hat{R}'_{j-\frac{1}{2},k}$ 和 $\hat{S}'_{j,k+\frac{1}{2}}$ 与 $\hat{S}'_{j,k-\frac{1}{2}}$ 的平均, $0 \leq \alpha \leq 2$ 。

3 二维界面追踪方法

首先讨论二维界面的几何拓扑结构。由于本文讨论的都是两种流体物质的情形,即假设计算区域是由两种不能够相互渗透的流体物质所占据。为方便起见,我们用黑与白两种颜色来标记流体:。

在处理分隔两种流体的物质界面过程中,我们需要根据与真实物质界面相联系的一些几何信息——即界面的几何拓扑结构,来区分不同的情形,相应地作出不同的处理。本文中,界面的几何拓扑结构可以由数值界面跨越附加在计算区域上矩形网格单元的各边的信息来唯一确定。

对界面几何拓扑结构的讨论建立在以下三个假设前提基础之上:

- (1) 任一网格单元中至多有两种流体存在;
- (2) 任一网格单元的每一条边至多与界面相交一次;
- (3) 在界面同一侧的网格单元边和角构成相邻系。

第一条假设对于本文所讨论的问题是显然成立的。第二条假设是说界面将会穿过网格单元的每一条边至多一次,而第三条则暗示如果一个单元格的两个角属于同一种流体,则连接这两个角的边也属于这种流体。后两条假设排除了界面上可能出现的尺度小于网格尺寸的振荡。

经过上面的叙述,我们发现可以将界面几何拓扑结构的问题抽象为这样的数学模型:给网格单元的四个顶角分别赋以黑色或白色,每一种不同的赋色方法代表一种拓扑结构,

因此可以计算出总共有 $2^4 = 16$ 种赋色方案，即共有 16 种拓扑结构。然而，我们还可以根据由同一种颜色所勾勒出的形状来将这 16 种拓扑结构分类。又由于互换任一种赋色方案中的两种颜色都可以获得另一种相应的结构，故而在只考虑黑色顶角出现次数小于或等于两次的情形。

这 16 种拓扑结构可分为四类不同的情况（如图 2 所示）：

- (1) 没有黑色的顶角；
- (2) 有一个黑色的顶角；
- (3) 有两个黑色的顶角，又可分为两种情况：
 - a. 两个黑色顶角是不相邻的；
 - b. 两个黑色顶角是相邻的。

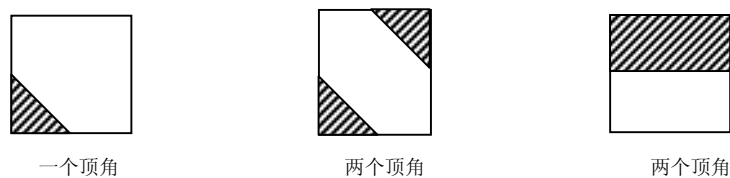


图 2 界面几何拓扑机构

本文所研究的二维问题是模拟一个二维管道中两种不同流体之间界面在激波作用下的发展情况。原 FT 方法的数值结果虽然比较好，但由于它要求追踪所有的波系和界面的发展，使得算法的计算量很大。下面我们推广一维算法到二维的情况，类似地可以得到如下四步算法：

- 首先，我们将界面看作一个边界，对其左右两种不同的流体之状态分别用时空二阶精度高分辨率 MmB 格式^[6] 进行时间推进到 $t + \Delta t$ 时刻。除靠近界面的点外，其余的各点均要作推进。若选用其他高分辨、无振荡差分格式并不影响界面的捕捉，而且计算结果与之接近。
- 第二步，以界面上一点为例，如图 1 所示（图中 x 方向为界面法线方向），根据界面两边的状态 S_{l2} 及 S_{r2} ，可以得到界面沿其法线方向的移动速度，而由此速度便可以确定出界面在 $t + \Delta t$ 时刻的新位置。从这个新位置引两条特征线，与 t 时刻的 x 坐标线交于 x_{l3} 和 x_{r1} 两点，此两点的状态为 S_{l3} 和 S_{r1} （待定）。
- 第三步，在界面的两侧沿其法线方向分别向外延伸 Δx （ Δx 为网格间距），得两点 x_l^1 及 x_r^1 ，其图 1 上的状态为 S_l^1 和 S_r^1 。为获得具有高精度的 S_l^1 和 S_r^1 值，设由该点所在网格处网格点状态的插值作为该点的状态值。但这一做法如果考虑的是激波正在接近界面（事实上在数值计算中激波并不是象我们所想象的那样，一步就与界面作用并穿过），则此线性插值虽然满足了数学上的精度，但与物理现象是不符合的。为此，我们引入强波探测开关，采用限制器算法。若激波正在通过该点所在的网格，则限制器开关状态设为开，将波后状态值赋给该点；若激波未通过该网格，则限制器开关状态设为关，状态值由插值得到。同样，在由 S_l^1 和 S_{l2} 求 S_{l3} 值，由 S_r^1 和 S_{r2} 求 S_{r3} 值的时候，采用了一维强波探测开关限制器二（式（11））。

● 最后，用 S_{i3} 及 S_{r1} 值通过求解黎曼精确解得到界面两侧未经前时间推进的所有点的状态值。

至此， $t + \Delta t$ 时刻所有网格点的值都已经赋新，即已完成了一次时间推进。然后，重复以上四个步骤，直至 Δt 的累和达到给定的时刻 t 结束计算。

4 计算结果与分析

为验证本方法的可用程度和准确性，进行了以下几个算例的计算（如图 3 所示），并将数值计算的结果与精确解作了比较。

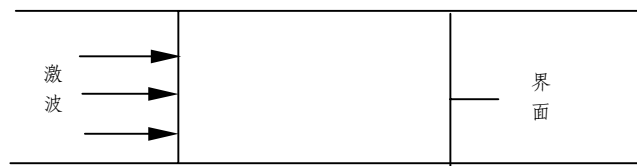


图 3 一维算例

以下下标 1 代表界面左边流体的状态，下标 2 代表界面右边流体的状态。

算例 1:

$u_1 = 0.0$	$u_2 = 0.0$
$p_1 = 0.1$	$p_2 = 0.1$
$\rho_1 = 0.04$	$\rho_2 = 0.125$
$\gamma_1 = 1.4$	$\gamma_2 = 1.4$

此算例中激波是从轻流体打向重流体，遇界面反射为一道激波，见图 4, 5。

算例 2:

$u_0 = 0.394$	$u_1 = 0.0$	$u_2 = 0.0$
$p_0 = 1.5698$	$p_1 = 1.0$	$p_2 = 1.0$
$\rho_0 = 1.3764$	$\rho_1 = 1.0$	$\rho_2 = 0.138$
$\gamma_0 = 1.4$	$\gamma_1 = 1.4$	$\gamma_2 = 1.67$

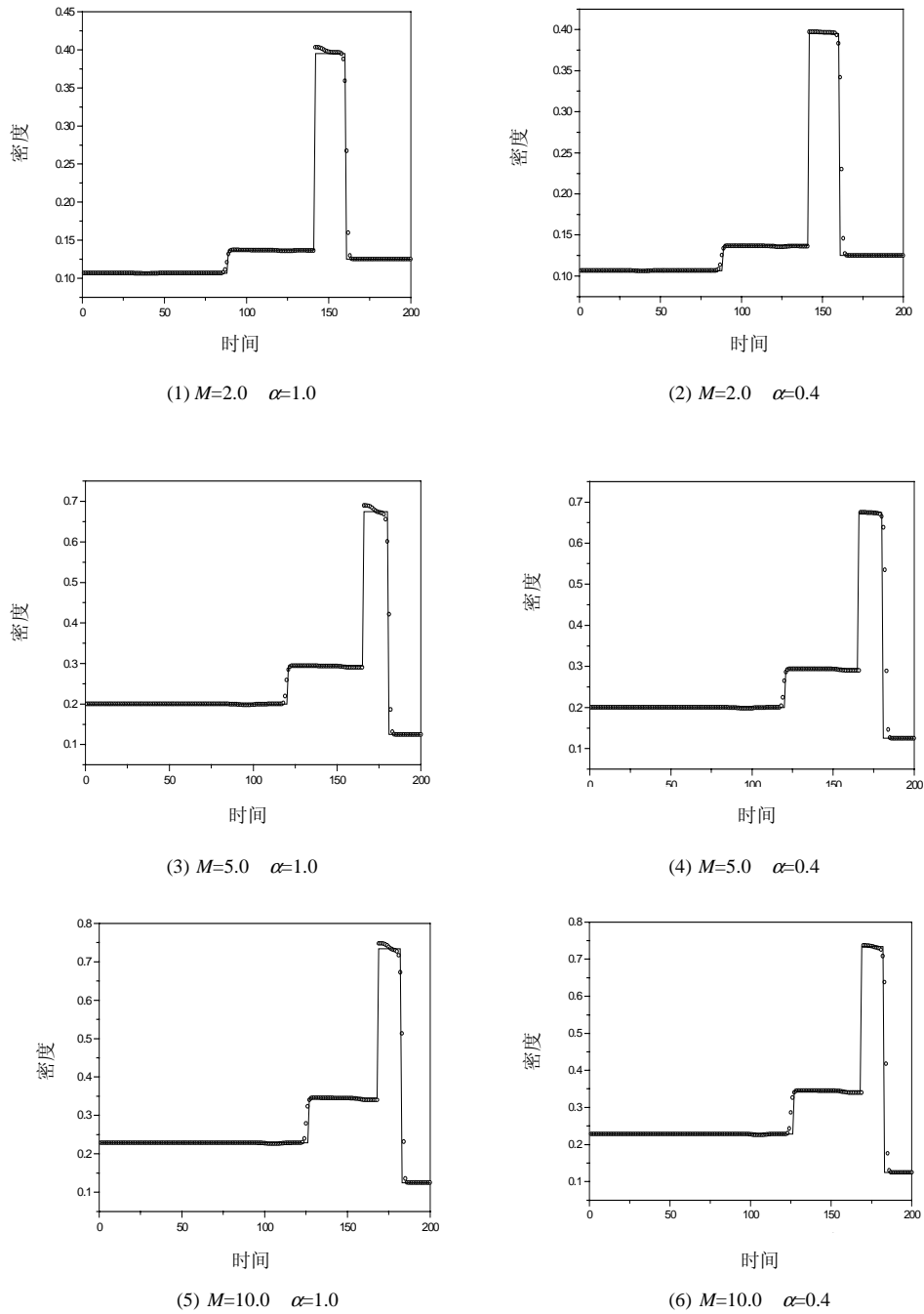
此算例中两种流体的 γ 值互不相同，下标 0 表示激波后状态值，计算结果见图 6, 7。

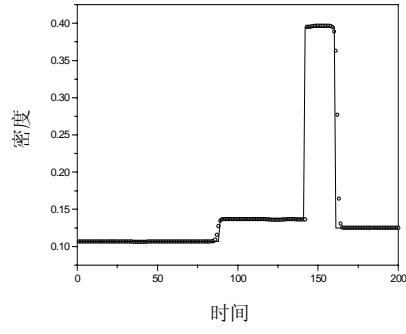
算例 1 及 2 中激波马赫数 M 分别取 2.0（较弱激波），5.0 及 10.0（较强激波）。每一算例中均分别使用限制器一和二，经试验得到对于限制器一 $\alpha = 0.4$ 时各算例均达到最佳的模拟效果，而对于限制器二 $\alpha = 0.5$ 时最佳。我们注意到 α 的取值均小于 1，而之所以会有这样的结果，是因为在数值计算中激波并非真正的物理间断，而总是跨越了许多网格点（虽然一般由图线表示时只有二三个点）。在这种情况下，何时认为激波已经到达就由 α 的取值来决定。另外，每一个计算结果均与精确解进行了比较，可以看出此方法的模拟效

果还是非常好的。

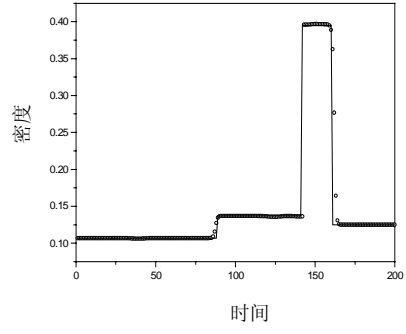
本文模拟的二维界面不稳定性问题如图 8 所示，界面上初始附加一正弦扰动，当入射激波穿过界面之后，该流体界面将产生 R-M 不稳定性，并随时间发展。为验证本方法的可用程度和准确性，进行了以下算例的计算。

图 4 算例 1，使用限制器一

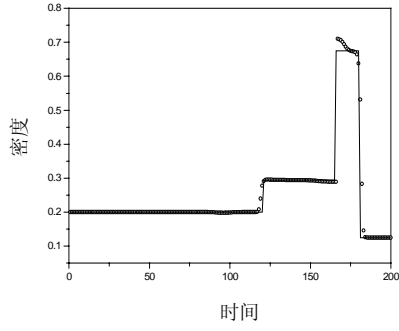




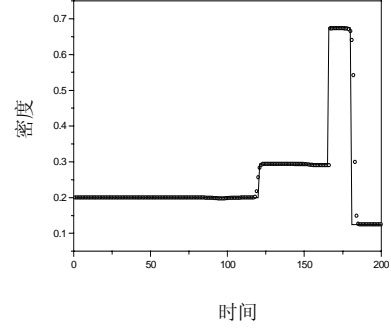
(1) $M=2.0$ $\alpha=1.0$



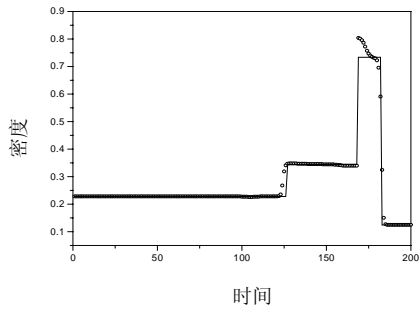
(2) $M=2.0$ $\alpha=0.5$



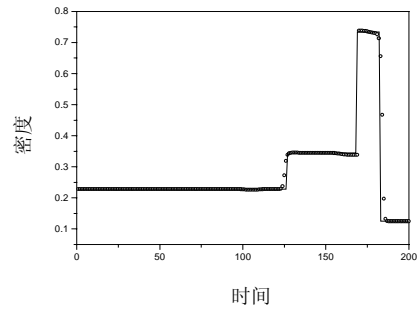
(3) $M=5.0$ $\alpha=1.0$



(4) $M=5.0$ $\alpha=0.5$



(5) $M=10.0$ $\alpha=1.0$



(6) $M=10.0$ $\alpha=0.5$

图5 算例1, 使用限制器二

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = 0.0 & u_2 = 0.0 \\
 v_1 = 0.0 & v_2 = 0.0 \\
 p_1 = 0.1 & p_2 = 0.1 \\
 \rho_1 = 0.04 & \rho_2 = 0.125 \\
 \gamma_1 = 1.4 & \gamma_2 = 1.4
 \end{array}$$

下标 1 代表界面左边流体的状态，下标 2 代表界面右边流体的状态。激波马赫数 M 取 2.0。由界面两侧的状态值可以看出，在此算例中，激波是从轻流体打向重流体，遇界面反射回来的将是一道激波，这一点在计算结果（如图 9 所示）中表现得非常明显。且从图中可以发现随时间推进，界面上的扰动不断发展，最终成为蘑菇形状。另外，将此数值计算结果（ $M = 2.0$ ）与非线性理论模型的计算结果相比较（如图 10 所示），发现两者基本吻合。

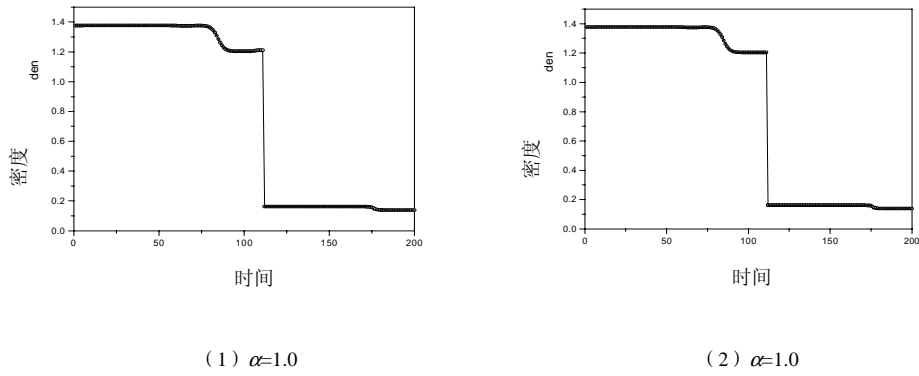


图 6 算例 2，使用限制器一

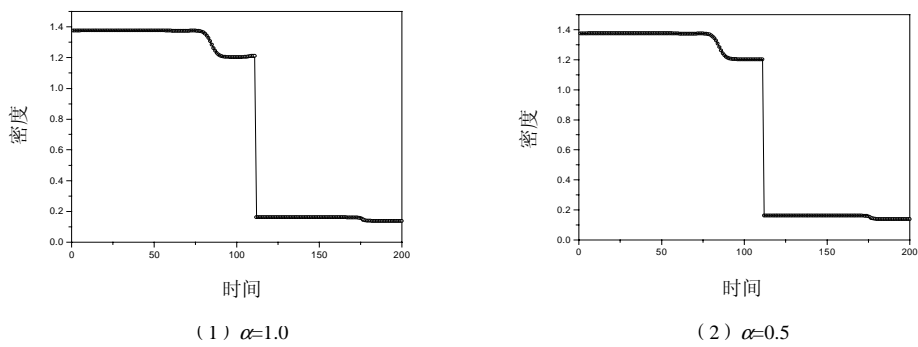


图 7 算例 2，使用限制器二

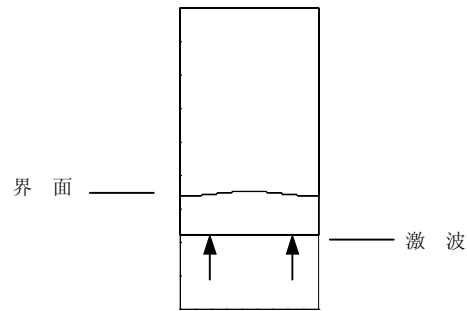
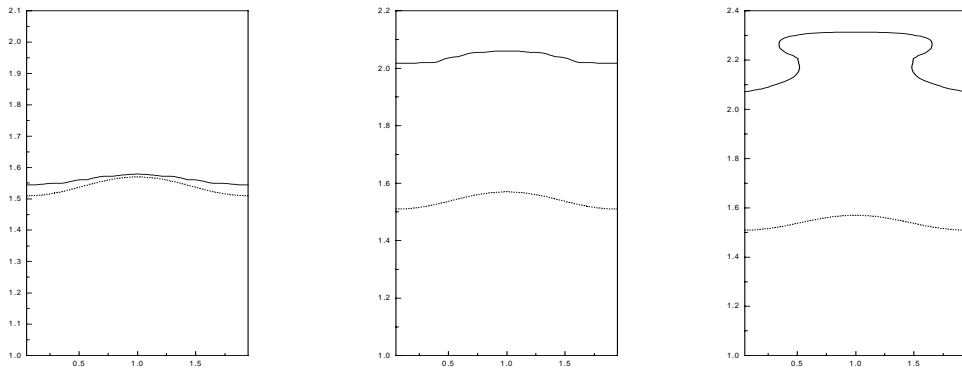
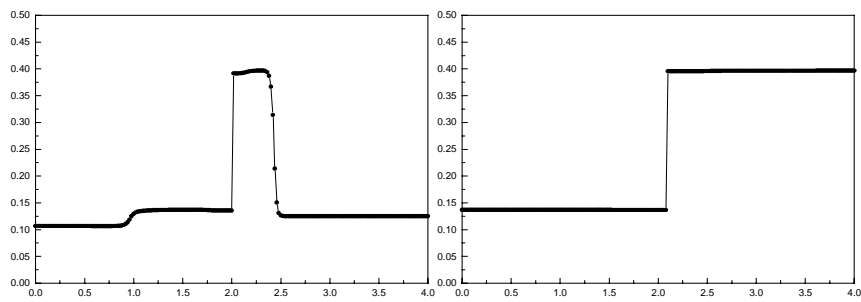


图8 二维界面不稳定性问题



(a) 界面所处位置及其形状 ($t=0.15, 0.60, 13.88$)

(图中虚线为含正弦扰动的初始界面)



(b) 取网格中一列密度值所作示意图 ($t=0.60, 13.88$)

图9 二维算例计算结果 ($M = 2.0$)

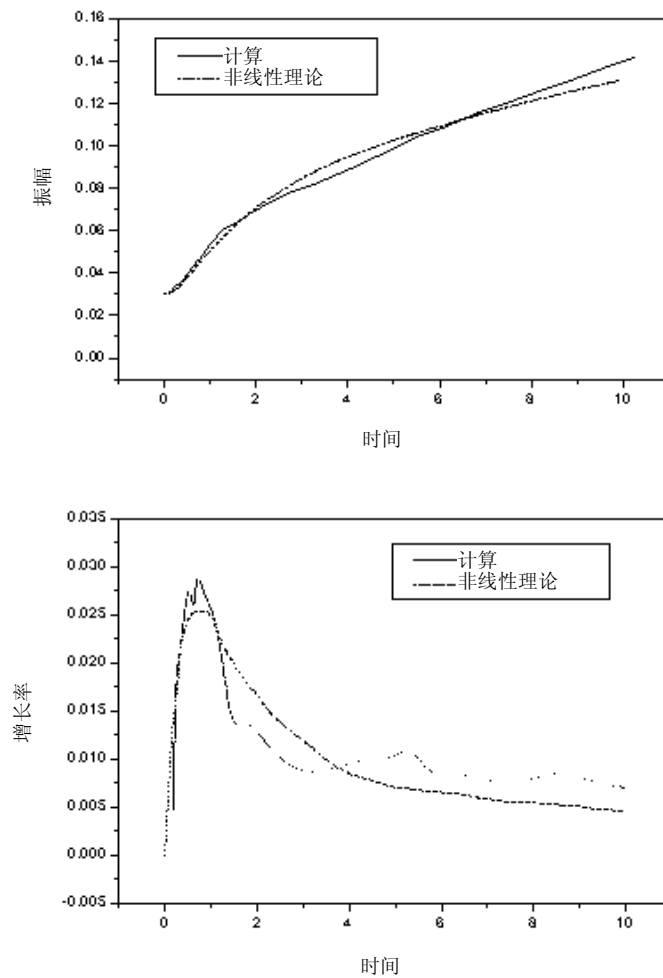


图 10 数值计算结果与非线性理论模型计算结果的比较

参 考 文 献

- 1 王淦昌, 袁之尚. 惯性约束核聚变. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.
(WANG Ganchang, YUAN Zhishang. Inertial Confinement Fusion. Hefei: Anhui Education Press, 1996)
- 2 Glimm J. Tracking of interfaces for fluid flow: Accurate methods for piecewise smooth problems, transonic, shock, and multidimensional flows: Advances in Scientific Computing. 1982, Academic Press. Inc. 259~287
- 3 Glimm J, Grove J, X. Li. Three Dimensional Front Tracking, SIAM J. Sci. Comput., 1998, 703~727
- 4 Glimm J, Grove J, X. Li, N. Zhao, Non-Oscillatory Front Tracking and Strong Shock-Contact Interaction in the Richtmyer-Meschkov Instability, (preparing)

- 5 Glimm J, John W. Grove, X. L. Li, N. Zhao. Simple Front Tracking, *Nonlinear Partial Differential Equations*, Edited by Chen, DiBenedetto, American Mathematical Society. 1999, 133~149
- 6 Fidkow J, Osher S. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multidimensional flows (The Ghost Fluid Method), *J. Comput. Phys.*, 1999, 152: 457~492
- 7 Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 1983, 49: 357~393
- 8 郑华盛, 赵宁, 戴嘉尊. 一类时空二阶精度高分辨率 MmB 差分格式的构造及数值试验. *计算数学*, 1998, 20(2): 137~146
(ZHENG Huasheng, ZHAO Ning, DAI Jiazun. A class of uniformly second order resolution schemes and their numerical experiments. *Math. Numer. Sinica*, 1998, 20(2): 137~146)