



20. 有限温度密度 QCD における階層的カイラル相転移

渡邊吉喜, 福嶋健二, 初田哲男

東京大学大学院 理学系研究科

Hierarchical Chiral Phase Transition in Hot and Dense QCD

Y. Watanabe, K. Fukushima, T. Hatsuda

Department of Physics, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

概要

We propose new order parameters of the chiral phase transition. An example in QCD with one massless flavor is $\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle$ with $\sigma \sim \bar{q}q$ and $\pi \sim \bar{q}i\gamma_5 q$. It has a discrete symmetry Z_2 unlike the case of the standard order parameter $\langle \sigma \rangle$. To study its relevance to the QCD phase diagram at finite temperature and density, we adopt a three-dimensional effective Φ^6 theory and evaluate the CJT effective potential for $\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle$. We found a non-trivial meta-stable state ($\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle \neq 0$ with $\langle \sigma \rangle = 0$) around the QCD tricritical point. This state is induced by the Fock term of the CJT potential.

1 序

量子色力学 (QCD)[1] において、低温低密度で自発的に破れているカイラル対称性は、高温/高密度において相転移を起こし回復すると考えられている。その相転移は秩序変数により記述される。このとき秩序変数は相の対称性と密接に関係している。

従来、カイラル相転移に対しては秩序変数としてクォークと反クォークの凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ が考えられてきた。しかし、 $\langle \bar{q}q \rangle$ が唯一の秩序変数であり他の量が秩序変数とは成り得ないという確かな理由はない。実際 $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle$ などカイラル対称性を破っている。

そこで本論では $\langle \bar{q}q \rangle$ 以外の秩序変数の可能性を考察していく。

2 秩序変数

フレーバー数 $N_f = 1$ の場合を本論では考える。このときカイラル対称性は $\bar{q}q$ と $\bar{q}i\gamma_5 q$ の間の対称性である。

具体的に $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle$ 、 $\langle (\bar{q}i\gamma_5 q)^2 \rangle$ を右手成分と左手成分に分解して書くと、

$$\langle (\bar{q}q)^2 \rangle = \langle (\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L)^2 \rangle = \langle (\bar{q}_L q_R)^2 \rangle + 2\langle \bar{q}_L q_R \bar{q}_R q_L \rangle + \langle (\bar{q}_R q_L)^2 \rangle \quad (1)$$

$$\langle (\bar{q}i\gamma_5 q)^2 \rangle = -\langle (\bar{q}_L q_R - \bar{q}_R q_L)^2 \rangle = -\langle (\bar{q}_L q_R)^2 \rangle + 2\langle \bar{q}_L q_R \bar{q}_R q_L \rangle - \langle (\bar{q}_R q_L)^2 \rangle \quad (2)$$

となる。 $\langle (\bar{q}_L q_R)^2 \rangle$ は右手成分と左手成分の相関を表しており、カイラル凝縮があるときのみ値をもつ。ここで、カイラル凝縮とは、真空がクォークの右手成分と左手成分の凝縮体となっていることをいう。 $\langle (\bar{q}_L q_R)^2 \rangle$ は $\bar{q}_L q_R$ が凝縮しているときには当然、値を持つが、 $\langle \bar{q}_L q_R \rangle$ が零であっても、高次の凝縮 $\langle (\bar{q}_L q_R)^2 \rangle$ があるときには値をもつことができる。

一方、 $\langle \bar{q}_L q_R \bar{q}_R q_L \rangle$ からの寄与のうち、 $\langle \bar{q}_L q_L \rangle \langle \bar{q}_R q_R \rangle$ の部分はカイラル凝縮がないときにも値を持つ。これは熱揺らぎの寄与であって、高温で値が大きくなる。そのため $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle$ 自身を秩序変数として用いることはできない。しかし、 $\langle \bar{q}i\gamma_5 q \rangle^2$ は高温における熱ゆらぎの寄与が $\langle \bar{q}q \rangle^2$ と同じであるから、2つの差を取ることで $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle - \langle \bar{q}i\gamma_5 q \rangle^2$ は、高温でのカイラル対称性が回復した相で期待値が0となる。

この量が有限の値をもつことはカイラル対称性が破れていることを意味し、 $N_f = 1$ に対応するカイラルスペース $O(2)$ 空間で、 $\bar{q}q$ と $\bar{q}i\gamma_5 q$ の方向によって揺らぎの大きさが異なる状態が実現されていることになる。通常考えられているカイラル対称性の破れとは $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ であるが、原理的には $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ であっても $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle \neq \langle \bar{q}i\gamma_5 q \rangle^2$ のような揺らぎの差によってカイラル対称性が破れている状況があり得る。

本論では $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle - \langle \bar{q}i\gamma_5 q \rangle^2$ が秩序変数となる可能性を考察する。

以後は $\sigma \sim \bar{q}q$, $\pi \sim \bar{q}i\gamma_5 q$ の対応によってカイラル対称性をメソン (σ, π) によって記述する。

3 対称性の自発的破れ

σ 方向のゆらぎと π 方向のゆらぎが異なる状態 $\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle \neq 0$ は、対称性の自発的破れにおいて基本的な定理である南部-Goldstone 定理からも自然に理解することが出来る。まずは、南部-Goldstone 定理を以下に述べる。

[定理]

大局的で連続的な対称性が自発的に破れる場合、破れた対称性の自由度にそれぞれ対応して零質量の粒子が存在し、破れた対称性のカレント j_μ と結合する [2]。

[条件]

- 1) 理論は、並進不変性と明白なローレンツ共変性を持つ。
- 2) 保存するベクターカレント j_μ が存在し、 $\partial^\mu j_\mu = 0$ を満たす。
- 3) あるスカラーの演算子 $\mathcal{O}(x)$ が存在し、 $\langle 0|[iQ, \mathcal{O}(x)]|0 \rangle = \langle 0|\delta\mathcal{O}(x)|0 \rangle \neq 0$ を満たす。 Q は対称性の微小変換の生成子である。

条件 3) は、対称性の自発的破れの正確な定義であり、

$$\begin{aligned} \langle 0|\delta\mathcal{O}(0)|0 \rangle &= 0 && \text{Wigner 相 (対称相)} \\ \langle 0|\delta\mathcal{O}(0)|0 \rangle &\neq 0 && \text{南部 - Goldstone 相 (SSB 相).} \end{aligned} \quad (3)$$

によって $\langle 0|\delta\mathcal{O}|0 \rangle \neq 0$ が対称性の自発的破れの指標となる。

条件3)の $\langle 0|[iQ, \Phi(x)]|0\rangle = \langle 0|\delta\Phi(x)|0\rangle$ の関係を σ と π によって以下に示す。
従来使われている秩序変数 $\langle\sigma\rangle$ による対称性の破れを Type I と呼ぶことにする。

Type I $\mathcal{O} = \pi$ と選ぶと、

$$[iQ_5, \pi] = \sigma \quad (4)$$

となり、 $\langle\sigma\rangle$ が秩序変数となる。

一方、本論で考察する秩序変数を Type II と呼ぶことにする。

Type II $\mathcal{O} = \sigma\pi$ と選ぶと、

$$[iQ_5, \sigma\pi] = \sigma^2 - \pi^2 \quad (5)$$

となり、 $\langle\sigma^2 - \pi^2\rangle$ が秩序変数となる。

Type I, Type II の秩序変数を一般化すると、Type K の秩序変数を考えることができる。Type K におけるカイラル対称性の回復とは、K 次の揺らぎまで等しくなること、 $\langle\sigma^K\rangle \sim \langle\pi^K\rangle$ 、である。 σ と π を $r \cos\theta, r \sin\theta$ と極座標表示してみる。 r を一定としたときの $(\cos\theta, \sin\theta)$ で表される円を、カイラルサークルと呼ぶ。この表示において、カイラル対称性はカイラルサークル上での回転である。Type I, Type II の秩序変数は $\langle\cos\theta\rangle, \langle\cos 2\theta\rangle$ に比例している。これを一般化すると Type K の秩序変数は $\sim \langle\cos K\theta\rangle$ と表せる。

Type K の秩序変数は、

$$\theta \rightarrow \theta + \frac{2\pi m}{K}, \quad m = 1, \dots, K-1 \quad (6)$$

の下で不変である。これは Type K の秩序変数によって特徴付けられる真空はカイラル対称性の離散的部分群 Z_K 対称性をもつことを意味している。

Type II の場合には Z_2 対称性は

$$\sigma \rightarrow -\sigma, \quad \pi \rightarrow -\pi \quad (7)$$

の変換として表され、確かに $\langle\sigma^2 - \pi^2\rangle$ はこの変換の下で不変になっている。

4 No-Go Theorem for Z_2 Symmetric Vacuum

離散部分群の対称性を持つ高次の秩序変数で特徴付けられる安定な真空の存在が QCD 不等式と矛盾することが、この Z_2 対称性を用いることによって証明されており、その証明は有限温度の系にも同様に適用することができる [3]。

しかし有限密度においては、QCD 不等式が成立しないことから、この証明は適用できない。よって

$$\langle\sigma\rangle = 0 \text{ であるにもかかわらず、} \langle\sigma^2\rangle - \langle\pi^2\rangle \neq 0$$

であることによってカイラル対称性が破れている状況は、有限密度領域において考察する必要がある。次節において、有限密度領域におけるカイラル相転移の取扱いを述べる。

5 有限温度密度 QCD

真空中で自発的に破れているカイラル対称性は、高温高密度において回復すると考えられている。実際、格子 QCD による数値実験によって高温領域での相転移は確認されており [4]、さらに有効模型の計算から、高密度領域での相転移の存在も示されている [5]。現在、零質量 2 フレーバー QCD の温度 T と化学ポテンシャル μ による相図は、図 1 のように考えられている。図 1 は、Type I の秩序変数 $\langle\sigma\rangle$ による相図である。カイラル相転移は、 $\mu=0$ では 2 次相転移であり、化学ポテンシャルを大きくしていくと 1 次相転移になると考えられている。1 次相転移が終わり 2 次相転移線につながる点を、3 重臨界点という。

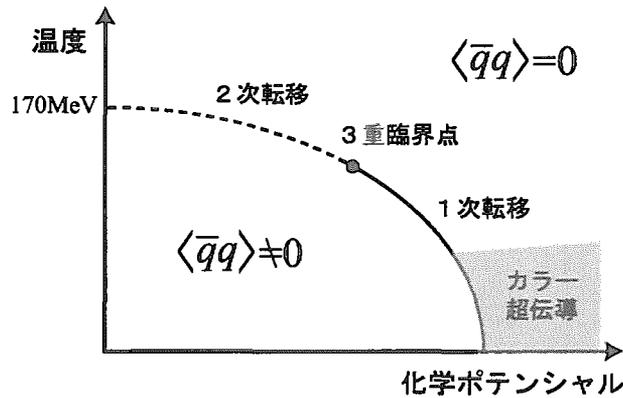


図 1: 零質量 2 フレーバー QCD の模式的相図

有限温度密度におけるカイラル相転移の近傍にたいしてはユニバーサリティクラスの議論から 3 次元 Φ^6 有効模型を用いた解析がなされている [6]。今の場合、 Φ は 2 成分ベクトル $\Phi = (\sigma, \pi)$ である。

この有効模型を用いて Type II の秩序変数を考える。

6 Possible New Phase in Φ^6 Theory

本節では Type I の秩序変数 $\langle\Phi_1\rangle$ と Type II の秩序変数 $\langle\Phi_1^2 - \Phi_2^2\rangle$ を同時に扱い、その 2 つを引数とした有効ポテンシャルから基底状態を決める。そのために、複合演算子 $\langle\Phi_a(x)\Phi_b(y)\rangle$ に対する有効作用の形式 (CJT 形式) を用いる。[7]。

CJT 有効作用 $\Gamma[\phi, G]$ は $\phi_a = \langle\Phi_a\rangle$ と $G_{ab} = \langle\Phi_a\Phi_b\rangle$ の汎関数であり、この 2 つの変数はそれぞれ外場 J_a と K_{ab} に対応した古典変数である。外場項は $\Phi_a J_a + \Phi_a K_{ab} \Phi_b$ として、ラグランジアンに付け加える。

一般的に CJT 有効作用は

$$\Gamma[\phi, G] = I(\phi) + \frac{1}{2}\text{Tr}(\ln G^{-1} + \mathcal{D}^{-1}G) + \Gamma_2[\phi, G] \quad (8)$$

と書かれる。第 1 項目は古典作用、第 2、3 項目は 1 ループグラフの寄与、 Γ_2 は 2 粒子既約グラフの寄与である。 \mathcal{D} はツリーレベルのプロパゲーターを表す。本論では、2 粒子既

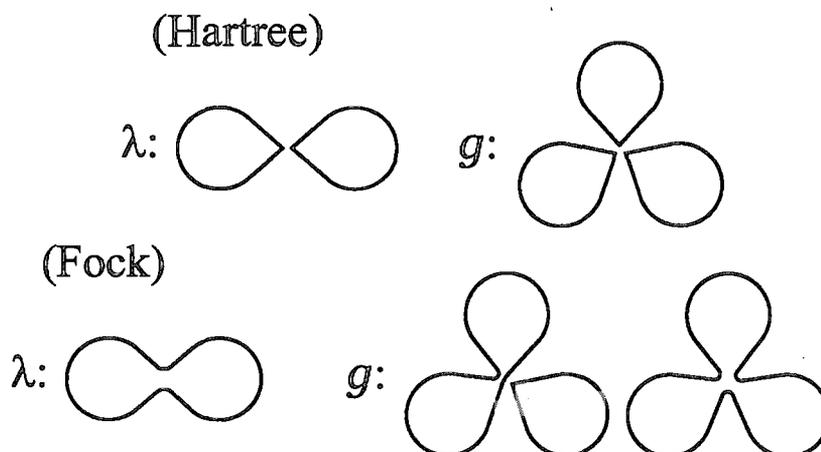


図 2: 相互作用 $\Gamma_2[\phi, G]$ に取り入れた、 Φ^6 理論における平均場近似での 2 粒子既約なグラフ。上段は Hartree 項の寄与、下段は Fock 項の寄与。

約グラフの寄与として相互作用に対する平均場近似を用いて評価する。取り入れた相互作用のファインマングラフを、図 2 に示す。3 次元ユークリッド空間での Φ^6 有効ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \partial_i \Phi_a \partial^i \Phi_a + m(T, \mu) \Phi^2 + \lambda(T, \mu) \Phi^4 + g(T, \mu) \Phi^6 \quad (9)$$

である。係数 m, λ, g は温度 T と化学ポテンシャル μ の関数であり、この依存性を通して QCD の相図上の点と m, λ, g の値は関係する。ここでは $\lambda > 0$ が 2 次相転移側、 $\lambda < 0$ が 1 次相転移側に対応している。この有効理論においては 3 次元運動量のカットオフとして、 Λ が自然に導入され、 Λ は今考えている温度 T_c 程度の大きさで与えられる。

この 3 次元有効 $O(2)\Phi^6$ 理論に対して、CJT 形式を適用する。

空間方向の揺らぎを表す積分は、 m_σ を σ の質量 m_π を π の質量として

$$\begin{aligned} G_{11} = \langle \Phi_1^2 \rangle &= \int^{\Lambda \sim T_c} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + m_\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} (\Lambda - m_\sigma \arctan(\Lambda/m_\sigma)) \sim \Lambda - m_\sigma \end{aligned} \quad (10)$$

と表される。 m_σ, m_π はギャップ方程式によって自己無撞着に決まる質量である。式 (10) から、対称性の破れと質量の関係は

$$\langle \sigma^2 \rangle = \langle \pi^2 \rangle \rightarrow m_\sigma = m_\pi \quad \text{Symmetric Phase} \quad (11)$$

$$\langle \sigma^2 \rangle \neq \langle \pi^2 \rangle \rightarrow m_\sigma \neq m_\pi \quad \text{Broken Phase (Type II)} \quad (12)$$

であることがわかる。つまり、今探している状態は通常のカイラル凝縮 $\langle \sigma \rangle$ が零であるにもかかわらず、シグマとパイの質量が自発的に異なっている状態である。

実際このような Type II 相を安定化させる機構は存在し、その条件は2つある。

- 相互作用項の Fock 項の存在
- Φ^4 の結合定数 λ が負

この2つが同時にあるときに初めて Type II への安定化がおこる。その理由を以下に述べる。

σ と π の自己エネルギーは、

$$m_{\sigma,\pi} \sim m + \lambda(\delta_{ab}G_{cc} + 2G_{ab}) + g(\delta_{ab}G_{cc}G_{dd} + \dots) \quad (13)$$

と表される。 G は式(10)のループ積分である。 a, b, \dots は内部対称性の添字である。4次の相互作用 $\lambda\Phi^4$ からの寄与 $\delta_{ab}G_{cc} + 2G_{ab}$ を見ると、1項目 $\delta_{ab}G_{cc}$ が Hartree 項であり、 m_σ に対して σ と π の両方の loop の寄与があり、 m_π に対しても σ と π の両方の loop の寄与がある。一方、2項目 G_{ab} は Fock 項であり、 m_σ に対しては自分自身 σ の loop の寄与だけがある。また m_π に対しては π の loop の寄与のみしかない。そのために Fock 項を考慮するときのみ、自己エネルギー (質量) が σ と π で異なる可能性がある。次に、式(10)(13)から Fock 項の働きを考えると、 $\lambda > 0$ のときは、 Φ_a の成分による自己エネルギー (質量) の違いを抑制する方向に働く。一方、 $\lambda < 0$ では Fock 項は自己エネルギー (質量) の違いを拡大する方向に働きうる。こうして、Fock 項が存在しかつ $\lambda < 0$ である2つの事実が、Type II の状態への不安定性を生む。ただし、これは λ が Hartree 項に対して影響を与えることを無視した単純な議論であるので、ギャップ方程式(13)を自己無撞着に扱う必要がある。

Fock 項は平均場近似として取り入れられており、 $\lambda < 0$ は1次相転移側に対応している。

この議論によって、2次相転移側では Type I の秩序変数 σ が零になると同時に、Type II の秩序変数 $\sigma^2 - \pi^2$ は零となり、 σ と π の質量は縮退することが分かった。

実際にポテンシャルでの Type II への不安定性への例を図3に示す。これは、再定義によってカットオフを吸収した係数 (\tilde{m}, \tilde{g}) で $(\tilde{m}, \tilde{g}) = (-0.22, 0.01)$ の場合のポテンシャルの等高線図である。 $(\tilde{\lambda}$ は変数の規格化によって吸収でき $\tilde{\lambda} = -1 < 0$ とおいている。) ここでは、 $\langle \Phi_1 \rangle = 0$ を仮定し、 $\langle \Phi_1 \rangle = 0$ 面でのポテンシャル $V[\langle \Phi_a \Phi_b \rangle] = V[m_\sigma, m_\pi]$ の断面図を示している。 $\langle \Phi_1 \rangle$ 方向への安定性については後で議論する。

図3の右図は軸上に現れている左図の破線で囲まれた極小部分を拡大した図である。図3の左図において、 $m_\sigma = m_\pi = 0.09$ にポテンシャルの最小値がある。これは $m_\sigma = m_\pi$ の対称相の解である。図の四角印は、鞍点となっている。丸印は、軸上での極小を示している。丸印が極小になっていることは、図3右図を m_σ 軸で反転して張り合わせた図を考えると理解できる。この極小は $m_\sigma \neq m_\pi$ の Type II の対称性の破れた相の解である。

図3のように軸上に極小が存在する結合定数の領域は、図4のグレイの領域である。図3で示した $(\tilde{m}, \tilde{g}) = (-0.22, 0.01)$ の点がこの領域に入っていることを確かめることができる。

また準安定な Type II の解が $\langle \Phi_1 \rangle$ 方向についても準安定であることを解析的に示すことができる。

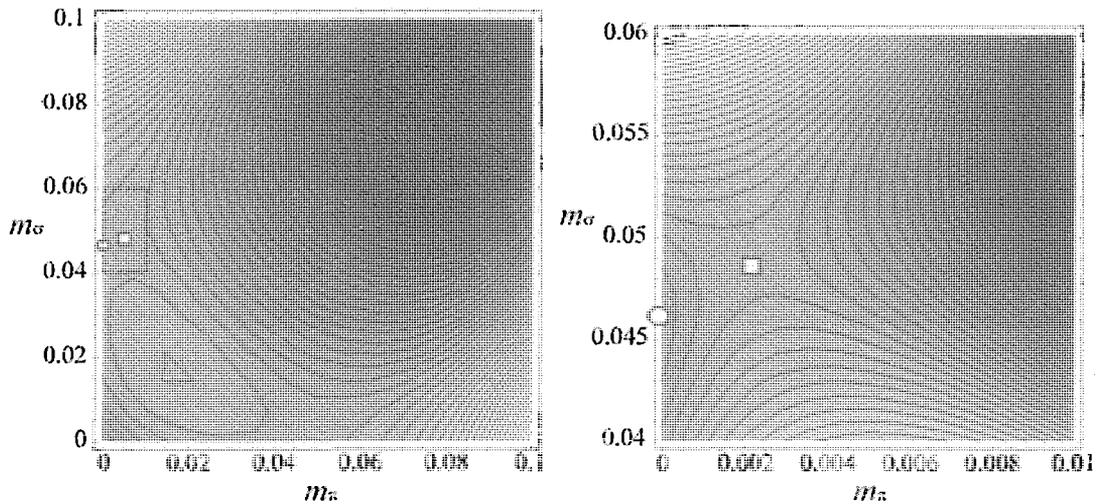


図 3: ポテンシャルの $m_\pi - m_\sigma$ 平面での等高線図。色の濃いところほどポテンシャルは深い。 $(m_\pi, m_\sigma) = (0.09, 0.09)$ に最少がある。 $(\tilde{m}, \tilde{g}) = (-0.22, 0.01)$ 。右図は左図の破線で囲まれた領域の拡大図。丸印は極小点 $(m_\pi, m_\sigma) = (0, 0.046)$ 、四角は鞍点である。全ての数値はカットオフ T_c を単位としている

よって、Type II の解が準安定状態として存在することがわかった。この状態は普通の意味でのカイラル凝縮 $\langle \sigma \rangle$ が零であるにもかかわらず、 σ と π の質量が自発的に異なっている状態である。この状態は準安定であるから、相図上で 1 次相転移側を系が通過する時に一時的な状態として Type II の状態をとることがあり得ると考えられる。

7 まとめと展望

本論では、カイラル相転移を特徴づける秩序変数の可能性を調べた。

$N_f = 1$ QCD において Type I の秩序変数は $[iQ_5, \pi] = \sigma$ から $\langle \sigma \rangle$ であり、Type II の秩序変数は $[iQ_5, \sigma\pi] = \sigma^2 - \pi^2$ から $\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle$ である。

Type II のカイラル対称性の破れは、有限温度、ゼロ化学ポテンシャルでは存在しないことが示されている [3]。

そこで、本論文では有限密度領域での QCD のカイラル相転移に注目し、相転移近傍での有効理論である 3 次元 Φ^6 理論を用いて解析を行った。秩序変数の揺らぎ $\langle \sigma^2 \rangle$, $\langle \pi^2 \rangle$ を平均場近似 (Hartree-Fock 近似) で取り込んだ。この揺らぎの差 $\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle$ が、Type II の秩序変数である。

Type I の凝縮 $\langle \sigma \rangle$ と Type II の凝縮 $\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle$ を同時に扱うために、複合演算子に対する有効作用—CJT 形式—を用いた。本論では「 $\langle \sigma \rangle = 0$ かつ、 $\langle \sigma^2 - \pi^2 \rangle \neq 0$ 」の領域を探し、その際、初めに $\langle \sigma \rangle = 0$ を仮定し、後に $\langle \sigma \rangle$ 方向に対する安定性を確かめた。

この状態は通常のカイラル凝縮が零であるにもかかわらず σ と π の質量の縮退が自発的にとけることを意味している。

解析の結果、有限密度においても 2 次相転移近傍では Type II の秩序変数で特徴付けら

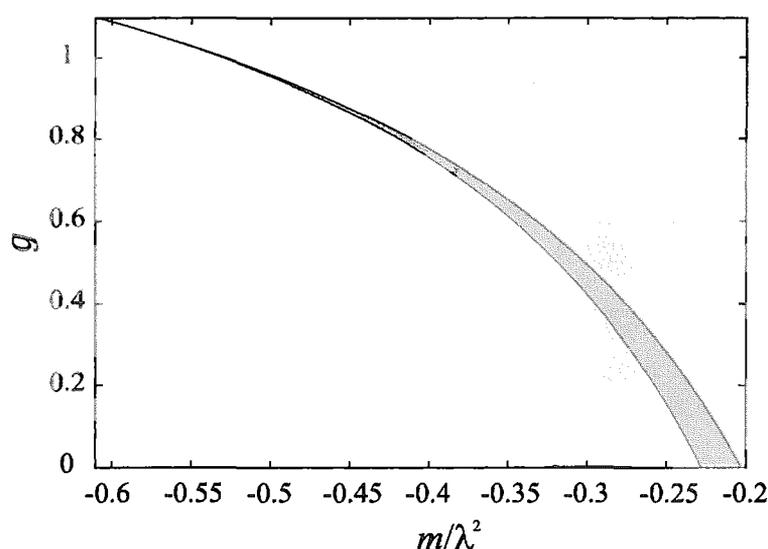


図 4: $\tilde{m} - \tilde{g}$ 平面におけるグレイの領域で Type II の基底状態が極小となる。

れる基底状態はないことがわかった。一方、1次相転移側においては Type II 相が準安定状態として存在することがわかった。

この Type II 相は

- Fock 項の存在
- Φ^4 の結合定数 λ が負

を原因として、 $m_\sigma \neq m_\pi$ 方向への不安定性によって生じる相である。

カイラル対称性の秩序変数の解析において、その一般化の方向は3つ考えることができる。

第1の方向は、ハミルトニアンにより高次の対称性、つまり $O(N)$ や $SU(N) \times SU(N)$ への一般化である。 $O(N)$ 対称性への一般化を行ったときも、Type II 相は準安定状態として存在する。

第2の方向は、秩序変数としてより高次の揺らぎ $\langle \hat{\Phi}^n \rangle$ から作られたものを調べることである。ここでは、 $n=2$ の場合を調べた。 n が3以上の場合を調べるには、CJT形式の一般化が必要である。また別のアプローチとして、非局所的な複合演算子に対する CJT形式ではなく、局所複合演算子に対する有効作用形式をつくることで、より直接的に有効ポテンシャルを求めることができる。

第3の方向は、相互作用により高次項、つまり $\hat{\Phi}^n$ を調べることである。ここでは $\hat{\Phi}^6$ までを調べた。 $\hat{\Phi}^6$ の係数が負となるときは $\hat{\Phi}^8$ 項が必要となり、このときは Fock 項を原因とする $m_\sigma \neq m_\pi$ 方向への不安定性がより強くなり、Type II 相が基底状態となる可能性がある。

本論では QCD について議論をしてきたが、その中で用いた Φ^n 理論は物理においてより普遍的にあらわれるモデルである。実際、 He^3 と He^4 の混合流体は Φ^6 理論によって記述さ

れ、メタ磁性と呼ばれる物質は Φ^8 理論によって記述されることが知られている。複数の秩序変数による階層的相転移という考えはこのような系にも同様に適用されるであろう。

参考文献

- [1] Y. Nambu, in *Preludes in Theoretical Physics*, in honor of V. F. Weisskopf, (North-Holland, Amsteldam, 1966).
- [2] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380 (1960).
J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).
J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [3] I. I. Kogan, A. Kovner, and M. A. Shifman, *Phys. Rev.* **D59**, 016001 (1999).
- [4] F. Karsch, *Lect. Notes Phys.* **583**, 209 (2002).
- [5] M. Asakawa and K. Yazaki, *Nucl. Phys.* **A504**, 668 (1989).
- [6] M. A. Stephanov, K. Rajagopal, and E. V. Shuryak, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4816 (1998);
Phys. Rev. **D60**, 114028 (1999).
Y. Hatta and T. Ikeda, *Phys. Rev.* **D67**, 014028 (2003).
- [7] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D10**, 2428 (1974).