

Geometría del TJ-II en Astra 6.0

D. López-Bruna
J.A. Romero
F. Castejón

GEOMETRÍA DEL TJ-II EN ASTRA 6.0

D. LÓPEZ-BRUNA, J. A. ROMERO, F. CASTEJÓN

Índice

1.. Introducción	1
2.. Ecuaciones de evolución y métrica en ASTRA	2
3.. Magnitudes métricas y promedios en el TJ-II	6
4.. Matriz de susceptancia: aproximación axisimétrica para baja β	7
5.. Ley de Faraday y evolución de la transformada rotacional	13
6.. Comparación entre ASTRA 6.0 y un código ajustado a la métrica del TJ-II	17
7.. Inducción de corriente en el TJ-II	20
8.. Conclusiones	22
Apéndice A. Código en ASTRA	22
Referencias	25

1. Introducción

En la actualidad, una de las herramientas más usadas en el Laboratorio Nacional de Fusión (LNF) para el análisis numérico del transporte en los plasmas del TJ-II [1] es ASTRA* [2]. El conjunto de códigos que forman ASTRA fue diseñado para permitir una intervención rápida e interactiva del usuario dedicado al transporte en máquinas axisimétricas de fusión por confinamiento magnético, motivo por el cual su uso para el transporte en dispositivos de geometría magnética más complicada, como la del TJ-II, requería un tratamiento cuidadoso de los aspectos geométricos [3]. Así se ha venido haciendo en el LNF (véase, p. ej. [4]) hasta que varios trabajos en los que se precisaba calcular la evolución de la transformada rotacional, $\iota = \iota/2\pi$, en respuesta a la inducción de corrientes eléctricas obligaron a afinar dichos aspectos. La evolución de ι es particularmente delicada porque se ve afectada por las facetas no-axisimétricas de la geometría [5]. Brevemente, las corrientes toroidal y poloidal dependen respectivamente de los flujos poloidal y toroidal en el caso axisimétrico, pero también de términos cruzados en el caso general no-axisimétrico. P. ej., la corriente toroidal tiene relación con los flujos magnéticos tanto poloidales como con los propios toroidales. Un primer paso para afrontar estos problemas es imponer de manera consistente la geometría de vacío del TJ-II en los cálculos de ASTRA. Esto no era posible en las primeras versiones de ASTRA.

Este informe describe los porqués y la manera en que la geometría de vacío del TJ-II se ha impuesto en la nueva versión de ASTRA, o versión 6.0 [6]. La Sec. 2 plantea el problema mediante un breve repaso de qué se necesita para hacer la evolución de las ecuaciones típicas del transporte en la descripción unidimensional, esto es, promediada a cada superficie de flujo magnético constante. En la Sec.

PACS 2006: 52.20.-j, 52.25.{Fi,Xz}, 52.55.{-s,Dy,Hc,Wq}, 52.65.{-y, Kj}

*Siglas para *Automatic System for TRansport Analysis*.

3 se indica cómo se han obtenido los promedios relevantes para el TJ-II de las magnitudes métricas necesarias según la Sec. 2; esto se hace en base a la librería `g3d` de funciones relacionadas con la geometría tridimensional del TJ-II [7]. El problema de la ruptura de axisimetría es difícilmente atacable en una descripción unidimensional de las diferentes magnitudes que intervienen en el transporte. Dado que, en definitiva, se trata de un problema de interacción no lineal entre la geometría y la propia evolución de los flujos magnéticos (o de las corrientes en el plasma), ofrecemos en la Sec. 4 una justificación de la aproximación axisimétrica que se ha adoptado por ahora para estimar la evolución de τ bajo la acción de densidades de corriente toroidal en los plasmas del TJ-II. Un trabajo futuro debería incorporar la posibilidad de que la propia geometría evolucione, algo todavía impracticable por su elevado coste computacional. En la Sec. 5 obtenemos la ecuación de evolución de la transformada rotacional en función de los coeficientes de la llamada “matriz de susceptancia” [5]. En la Sec. 6 se muestran algunos cálculos comparativos entre los resultados de ASTRA 6.0 y un código de transporte *ad hoc*. En la Sec. 7 mostramos un caso de evolución de τ bajo la acción de corrientes inducidas mediante efecto transformador en los plasmas del TJ-II. Finalmente, la Sec. 8 hace un breve resumen de lo anterior.

2. Ecuaciones de evolución y métrica en ASTRA

En todo lo que sigue adoptaremos la convención de que la distribución espacial de las magnitudes termodinámicas (densidad de partículas y de energía, principalmente) depende exclusivamente de la coordenada “radial” ρ que etiqueta cada superficie de flujo. Seguiremos la notación típica (véanse, p. ej. [8, 9]) para hacer un breve repaso del paradigma unidimensional del transporte. Según éste, es conveniente relacionar un cierto promedio espacial de los flujos de partículas y energía con el mismo promedio de las fuerzas termodinámicas. La experiencia en el transporte colisional aconseja que dicho promedio sea el aniquilador del operador espacial $\mathbf{B} \cdot \nabla$. Dicho de otra forma, la operación debe ser tal que la variación a lo largo de \mathbf{B} sea nula tras el promediado, de manera que se trata de una “uniformización” de las magnitudes en las llamadas superficies magnéticas o superficies de flujo.

Sea \mathcal{F} la magnitud que se desea promediar. La condición solenoidal de \mathbf{B} impone $\nabla \cdot (\mathcal{F}\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathcal{F}$. Esto permite concretar el operador de promediado, que expresaremos mediante corchetes angulares. Así, el requisito $\langle \mathbf{B} \cdot \nabla \mathcal{F} \rangle = 0$ se cumple inmediatamente si adoptamos como operación $\langle \dots \rangle$ algo proporcional a una integral de volumen cuya envolvente sea una superficie de flujo \mathcal{S} , pues

$$\int_V \mathbf{B} \cdot \nabla \mathcal{F} dV = \int_V \nabla \cdot (\mathcal{F}\mathbf{B}) dV = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

al ser \mathbf{B} tangente a dichas superficies. Entonces, se define el promedio a la superficie de flujo como la cantidad

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathcal{F} dV = \frac{d}{dV} \int_V \mathcal{F} dV \quad (2.1)$$

siendo ΔV el volumen infinitesimal entre dos superficies de flujo contiguas. Sean ahora unas coordenadas radial, ρ , angular poloidal θ y angular toroidal ξ tales que ρ etiqueta las superficies de flujo mientras que θ y ξ las parametrizan. El

elemento de superficie sobre una de éstas puede expresarse, si \sqrt{g} es el jacobiano de la transformación, como [10] $\mathbf{dS} = \sqrt{g}\nabla\rho d\theta d\xi$, de manera que la Ec. 2.1 puede expresarse como

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F} \rangle &= \lim_{\Delta\rho, \Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\xi \sqrt{g} \mathcal{F}(\rho, \theta, \xi)}{\Delta V} \\ &= \lim_{\Delta\rho, \Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\xi \sqrt{g} \mathcal{F}(\rho, \theta, \xi) = \\ \langle \mathcal{F} \rangle &= \frac{1}{\frac{dV}{d\rho}} \int_S \frac{dS}{|\nabla\rho|} \mathcal{F}(\rho, \theta, \xi).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Obsérvese que $\langle \dots \rangle$ actuando sobre una magnitud ya promediada es un operador identidad.

El teorema de la divergencia y la definición Ec. 2.1 permiten demostrar* que, para cualquier vector $\mathbf{\Gamma}$, el promedio de la divergencia admite la expresión

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} \rangle = \frac{d}{dV} \langle \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla V \rangle = \frac{d\rho}{dV} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{\partial V}{\partial\rho} \langle \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla\rho \rangle \right] = \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial\rho} [V' \langle \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla\rho \rangle]. \quad (2.3)$$

Las ecuaciones de transporte, que expresan leyes de conservación, relacionan las variaciones temporales de las magnitudes con la divergencia de sus flujos. La Ec. 2.3 es comúnmente usada para evaluar divergencias en los códigos de transporte, pues lo habitual es trabajar con magnitudes promediadas. Por lo tanto, la magnitud $V' = dV/d\rho$, o volumen específico de la configuración magnética supuestamente formada por superficies perfectamente anidadas, es necesaria para evaluar las variaciones de los perfiles termodinámicos. En general, si una magnitud $F = \langle \mathcal{F} \rangle$ responde a la ecuación general de conservación en presencia de una fuente S , entonces**

$$\frac{\partial F(\rho)}{\partial t} + \langle \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} \rangle = S(\rho). \quad (2.4)$$

A su vez, el flujo puede provenir de modelos difusivos o convectivos, de manera que en general tendremos velocidades de convección, \mathbf{v} , y coeficientes de difusión D tales que $\mathbf{\Gamma} = F(\rho)\mathbf{v}(\rho, \theta, \phi) - D(\rho, \theta, \phi)\nabla F(\rho)$. Podemos calcular la divergencia de este flujo usando la Ec. 2.3:

$$\begin{aligned}\langle \nabla \cdot [F(\rho)\mathbf{v}(\rho, \theta, \xi)] - \nabla \cdot [D(\rho, \theta, \xi)\nabla F(\rho)] \rangle &= \\ \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial\rho} [V' \langle F(\rho)\mathbf{v}(\rho, \theta, \xi) \cdot \nabla\rho - D(\rho, \theta, \xi)\nabla F(\rho) \cdot \nabla\rho \rangle] &= \\ \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[V' F(\rho) \langle \mathbf{v}(\rho, \theta, \xi) \cdot \nabla\rho \rangle - V' |\nabla\rho|^2 \langle D(\rho, \theta, \xi) \rangle \frac{\partial F(\rho)}{\partial\rho} \right].\end{aligned}\quad (2.5)$$

* $\langle \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} \rangle = \frac{d}{dV} \int_V \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} dV = \frac{d}{dV} \int_S \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{dS}$. Usando de nuevo la expresión del elemento \mathbf{dS} encontramos $\langle \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} \rangle = \frac{d}{dV} \int_S \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla\rho \sqrt{g} d\theta d\xi = \frac{d}{dV} \int \frac{d\rho}{dV} \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla V \sqrt{g} d\theta d\xi = \frac{d}{dV} \left[\frac{d}{dV} \int_V \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla V dV \right]$, de donde se obtiene la propiedad $\langle \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} \rangle = \frac{d}{dV} \langle \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla V \rangle$.

** Aquí suponemos que $S = S(\rho)$ se ha obtenido promediando, p. ej. mediante la Ec. 2.2, una fuente no necesariamente distribuida según las superficies de flujo.

Con esto hemos conseguido expresar la divergencia de un flujo mediante derivadas en la etiqueta ρ (sobre la que aún tenemos cierta libertad) y mediante elementos como V' y $\nabla\rho \cdot \nabla\rho = g^{\rho\rho} = g^{11}$. Sólo faltaría definir los promedios \mathbf{v} y D . Se observa la ventaja de esta formulación apuntada al principio: la suposición $F = F(\rho)$ permite quedarse con el promedio de los elementos que dan flujo, como la convección y la difusión, pues los gradientes son automáticamente “radiales”. El problema resulta, finalmente, unidimensional. Téngase en cuenta que la suposición $F = F(\rho)$ aquí es *fundamental*, de manera que el método de los promedios resultará tanto más inadecuado cuanto mayor sea la heterogeneidad de F en cada superficie de flujo, máxime si la interacción entre F , las fuentes y los coeficientes de transporte es fuertemente no lineal.

La Ec. 2.4 no necesita, en principio, más que el promedio de g^{11} . Suponiendo axisimetría pero no simetría poloidal, la operación de promedio a la superficie de flujo se simplifica, $\langle F \rangle = 2\pi(d\rho/dV) \int_0^{2\pi} \sqrt{g} F d\theta$, y la relación entre el campo magnético y la densidad de corriente puede expresarse en función de los promedios de los dos elementos métricos diagonales restantes (ver Sec. 4). En particular, la coordenada toroidal ξ resulta ser estrictamente polar y $g^{33} = R^{-2}$ siendo R el radio mayor del toroide. Correspondientemente, $g_{33} = R^2$. ASTRA necesita los promedios de estos coeficientes para la ecuación de difusión de la corriente, y es aquí donde pueden aparecer las mayores discrepancias entre los cálculos con ASTRA y una descripción bien ajustada a la geometría del TJ-II. En particular, el código usa la aproximación axisimétrica para definir las componentes del campo \mathbf{B} en coordenadas magnéticas* (véase [10]):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} \nabla\Psi \times \nabla(\xi - q\theta) = \frac{1}{2\pi} \nabla\Psi \times \nabla\xi - \frac{q}{2\pi} \nabla\Psi \times \nabla\theta = \mathbf{B}_{\text{pol}} + \mathbf{B}_{\text{tor}}. \quad (2.6)$$

Aquí hemos usado el hecho de que ∇q es paralelo a $\nabla\Psi$, habiendo tomado (al igual que se hace en ASTRA [6])

$$\Psi = -\psi = - \int_{\theta \text{ cte.}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\theta \text{ cte.}} \mathbf{B} \cdot \nabla\theta \sqrt{g} d\xi d\rho = - \frac{1}{2\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \nabla\theta dV, \quad (2.7)$$

esto es, una función opuesta al flujo magnético poloidal ψ . La cantidad $q = 1/t$ es el factor de seguridad, inverso a la transformada rotacional; la parte toroidal del campo magnético \mathbf{B}_{tor} se expresa en la manera usual para un *tokamak*,

$$\mathbf{B}_{\text{tor}} = I_A \nabla\xi, \quad (2.8)$$

siendo $I_A(\rho)$ una función mediante la cual se puede expresar también la densidad de corriente \mathbf{j} . La relación con la corriente poloidal $F = \int_{\theta \text{ cte.}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ es [6]

$$I_A = I_A(\rho = 0) - \frac{\mu_0}{2\pi} F, \quad (2.9)$$

donde se toma como valor en ausencia de corrientes poloidales en el plasma $I_A(0) = R_0 B_0$. Salvo por el factor $\mu_0/2\pi$, esto es la corriente total que debería circular por unas bobinas toroidales en un toro de radio R_0 para que el campo en el eje magnético

*Entendemos por *coordenadas magnéticas* aquéllas en las que la representación de las líneas de \mathbf{B} en el plano de coordenadas angulares θ - ξ resulta en rectas.

fuera B_0 . En un *estelarador* puede haber confinamiento con $F = 0$, y las Ecs. 2.8 y 2.9 están imponiendo que el campo toroidal de vacío siga la ley $B_{\text{tor}} = B_0(R_0/R)$, lo que no tiene por qué darse en general. El lector puede comprobar en la Ref. [6] que ASTRA utiliza varias expresiones necesarias para el cálculo de la evolución de la transformada rotacional en base a definiciones para B_{pol} inexactas para un estelarador. P. ej., considerando un vector unitario \mathbf{u}_ξ en la dirección de $\nabla\xi$ que, en condiciones de axisimetría, es perpendicular a $\nabla\rho$, se toma (ver Ec. 2.6)

$$B_{\text{pol}} = \left| \frac{1}{2\pi} \nabla\Psi \times \nabla\xi \right| = \frac{\psi'}{2\pi} |\nabla\rho \times \nabla\xi| = \frac{\psi'}{2\pi} \left| \nabla\rho \times \frac{\nabla\mathbf{u}_\xi}{R} \right|,$$

de donde

$$\langle B_{\text{pol}} \rangle = \frac{\psi'}{2\pi} \left\langle \frac{|\nabla\rho|}{R} \right\rangle;$$

mientras que en un caso más general tomaríamos*

$$\langle B_{\text{pol}} \rangle = \left\langle \psi' \left| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} \right| \right\rangle = \frac{\psi'}{2\pi} \left\langle \sqrt{\frac{g_{22}}{g}} \right\rangle. \quad (2.10)$$

La relación con la corriente toroidal es aún más problemática, pues la axisimetría impone $g_{ij} = g^{ij} = 0$; $i \neq j$. Así, en ASTRA se define la densidad de corriente toroidal como

$$j_{\text{tor}} = R_0 j^\xi = R_0 (\mathbf{j} \cdot \nabla\xi) = R_0 \frac{1}{\mu_0 V'} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{V'}{2\pi} \left\langle \left(\frac{\nabla\rho}{R} \right)^2 \right\rangle \psi' \right], \quad (2.11)$$

mientras que en un caso en el que $g_{\theta\xi} \neq 0$, la relación** entre la componente toroidal de la densidad de corriente y las componentes del campo magnético es, según la ley de Ampère:

$$j_{\text{tor}} = R_0 \left\langle \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{g_{\theta\theta}}{2\pi \sqrt{g}} \psi' \right] \right\rangle + R_0 \left\langle \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{g_{\theta\xi}}{2\pi \sqrt{g}} \phi' \right] \right\rangle, \quad (2.12)$$

resultado que se obtiene de la expresión correcta del rotacional junto con la regla para voltear índices en la geometría diferencial, $B_i = g_{ij} B^j$ con el sumatorio sobreentendido; o sea, $B_\theta = g_{\theta\theta} B^\theta + g_{\theta\xi} B^\xi$.

En las ecuaciones de transporte, ASTRA usa los siguientes promedios de cantidades métricas adimensionales: $G11 = \langle (\nabla\rho)^2 \rangle$ (véase la Ec. 2.5); $G22 = \left\langle \left(\frac{\nabla\rho}{R} \right)^2 \right\rangle$ (véanse las Ecs. 2.10, 2.11 y 2.12); y $G33 = \langle R_0^2/R^2 \rangle$ (véanse los comentarios siguientes a la Ec. 2.8), donde se define la coordenada radial con dimensiones de longitud $\rho = \sqrt{\Phi}/(\pi B_0)$ siendo Φ el flujo toroidal magnético a través de la sección transversal de cada superficie de flujo.

ASTRA calcula estos coeficientes tras resolver la ecuación de Grad-Shafranov

*Aquí usamos la relación entre elementos de bases duales (bases de gradientes y de vectores "velocidad") en el espacio euclídeo; en particular, $\partial\mathbf{r}/\partial\theta = -\sqrt{g}\nabla\rho \times \nabla\xi$.

** Aquí, por simplicidad, supondremos que el conjunto de coordenadas ρ , θ y ξ son magnéticas en el sentido mencionado en la nota * de la p. 4. En tal caso, $B^\theta = 1/(2\pi\sqrt{g})\psi'$ y $B^\xi = 1/(2\pi\sqrt{g})\phi'$.

supuesto un plasma en equilibrio magnetohidrodinámico. Para aproximar el código a otras geometrías, se permite fijar externamente la geometría mediante una sustitución de los coeficientes métricos que, de acuerdo con las ecuaciones recién mencionadas, deben ser:

$$G11 = \langle g^{\rho\rho} \rangle; G22 = \left\langle \frac{g_{\theta\theta}}{g} \right\rangle; G33 = \langle R_0^2 g^{\xi\xi} \rangle, \quad (2.13)$$

además de V' . Obsérvese que se sigue tratando de una descripción limitada de la geometría excepto para las ecuaciones de difusión del tipo de la Ec. 2.5. En el caso de las ecuaciones de evolución de la corriente (o del flujo magnético poloidal, como de hecho hace ASTRA), tenemos dos aproximaciones principales: primero, R_0 debería relacionarse con algún promedio apropiado de $R(\rho, \theta, \xi)$ y, además, B_0 debería satisfacer lo mejor posible la relación $BR = B_0 R_0$; en segundo lugar, la evolución de la corriente toroidal sólo quedará razonablemente aproximada en tanto un proceso de inducción haga cambiar ϕ' muy poco con respecto al valor de vacío (segundo promedio de la Ec. 2.12). De estos aspectos tratan las dos siguientes secciones.

3. Magnitudes métricas y promedios en el TJ-II

Como es lógico, el caso más normal en los estudios de transporte en el TJ-II no involucra la evolución de la corriente toroidal. Si bien es cierto que siempre hay algo de corriente toroidal neta I_p , por ahora carecemos de modelos fiables para describirla y los cálculos suelen hacerse suponiendo $I_p = 0$ y considerando la geometría de vacío. En las condiciones típicas de plasmas calentados por resonancia ciclotrónica electrónica esta aproximación debe ser aceptablemente buena salvo, quizás, en el área de deposición de calor en las cercanías del eje magnético. Consideraremos, pues, que las magnitudes métricas fundamentales son $\langle g^{11} \rangle$ y $V'(\rho)$. Estas magnitudes se pueden obtener fácilmente de la librería `g3d`, si bien hay que tomar algunas precauciones.

En esta sección vamos a seguir la notación dada en el manual* de `g3d` para relacionar las magnitudes allí descritas con las usadas en la Sec. 2. Recordemos que la transformación en la que se basa `g3d` para obtener las cantidades métricas es aquella que relaciona las coordenadas cilíndricas (R, ξ, z) con unas coordenadas de tipo toroidal, (s, ξ, θ) , apropiadas para la descripción de la geometría magnética. La coordenada radial usada en `g3d` se define como el flujo magnético toroidal normalizado, $s = \sqrt{\Phi/\Phi(a)}$, siendo a el radio menor promedio de la sección de la columna de plasma y, por lo tanto, $\Phi(a)$ el flujo magnético toroidal correspondiente a la envolvente del flujo**. En ASTRA se define $\rho = \sqrt{\Phi/(\pi B_0)}$ con dimensiones de longitud. Para hacer equivalentes ambas coordenadas, establecemos la relación $\rho = as$. Entonces $V' = dV/d\rho = (dV/ds)/a$, relación que se expresa, en los términos de `g3d`, como `dvolum/(a*dsv)`. Otra magnitud muy importante es el jacobiano de

*Actualmente esta librería se encuentra instalada en varias computadoras del CIEMAT. Concretamente, en la `jen50` puede encontrarse el manual en `jen50.ciemat.es:/r2/fusion/guasp/isodin.dir/geomdir/g3d.readme`.

***Last Closed Flux Surface* o, abreviadamente, LCFS en la literatura inglesa.

la transformación. La cantidad llamada `gjac` en la librería `g3d` es realmente la raíz cuadrada del determinante formado por los elementos métricos covariantes:

$$\text{gjac} = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right|}, \quad (3.1)$$

Téngase presente que la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico siempre coincide con el jacobiano de la transformación que relaciona las coordenadas *euclídeas* con las nuevas coordenadas. Si llamamos (x, y, z) a la tríada euclídea, \sqrt{g} equivale al determinante de la matriz jacobiana cuyos elementos son $\partial(x, y, z)/\partial(s, \xi, \theta)$ pero *no* al de la matriz formada por elementos $\partial(R, \xi, z)/\partial(s, \xi, \theta)$, de manera que `gjac` es el jacobiano de la transformación que pone (x, y, z) en función de (s, ξ, θ) . En realidad, éste es el que normalmente nos interesa para evaluar elementos de superficie etc. y a él nos hemos ido refiriendo en la sección anterior, salvo por una excepción ya señalada: Las coordenadas que venimos empleando hacen uso de ρ en vez de s , de manera que mantenemos nuestra notación recordando que

$$\sqrt{g} = \sqrt{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \xi, \theta)} \right|} = \frac{1}{a} \sqrt{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, \xi, \theta)} \right|} = \text{gjac}/a. \quad (3.2)$$

Es necesario definir el operador de promedio a la superficie de flujo, Ecs. 2.1 ó 2.2, mediante el uso de `g3d`. En esta librería podemos acceder directamente a las magnitudes $dV/ds(s)$ y $S(s)$, o superficie lateral. Para hallar los promedios a la superficie de flujo de magnitudes definidas en la malla de cálculo se dispone de la función `g3d.unif`, pero a veces interesa promediar una magnitud construida mediante la malla (s, ξ, θ) . Para estos casos, podemos usar la Ec. 2.2 en formas equivalentes según interese definir el promedio en los nodos o en las coronas:

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \frac{1}{V'} \int \sqrt{g} \mathcal{F} d\theta d\xi = \frac{\langle |\nabla \rho| \rangle}{S} \int \sqrt{g} \mathcal{F} d\theta d\xi. \quad (3.3)$$

La última relación se obtiene inmediatamente al usar la definición Ec. 2.2 para evaluar $\langle |\nabla \rho| \rangle$. A veces usaremos el elemento de superficie correspondiente a la métrica inducida en cada superficie de flujo según su parametrización por ángulos, $dS = d\theta d\xi \sqrt{g_{22}g_{33} - (g_{23})^2}$, para calcular en la misma manera la superficie lateral S y los promedios a la misma según la Ec. 3.3.

Resumimos en el cuadro 1 las magnitudes (Ec. 2.13) que imponemos en ASTRA para aproximar la geometría del TJ-II y la manera de extraerlas de `g3d`. Recordemos que, en esta librería, $(\nabla \rho)^2 = a^2 \text{gcn}(1, 1)$; $(\nabla \xi)^2 = \text{gcn}(2, 2)$; $(\partial \mathbf{r} / \partial \theta)^2 = \text{gco}(3, 3)$; y $dV = \text{dvolum}$. Debe tenerse en cuenta que V' se centrará en las coronas si se toma `dvolum` directamente, pues esta cantidad se define en los nodos.

4. Matriz de susceptancia: aproximación axisimétrica para baja β

En la Sec. 3 hemos hecho uso de la relación entre la derivada radial de los flujos magnéticos poloidal o toroidal y las respectivas corrientes. Como veremos, esto no es sino una materialización concreta de la ley de Ampère en su forma integral, la

CUADRO 1. *Magnitudes métricas que se pueden imponer en ASTRA. La columna izda. muestra el nombre dado en ASTRA, la central el significado (ver también las Ecs. 2.13 y 3.3) y la dcha. la relación con las magnitudes que pueden obtenerse directamente de la librería g3d.*

Nombre ASTRA	significado	expresión g3d
G11	$\langle \nabla\rho ^2 \rangle$	$\frac{\mathbf{raver}^2}{dV/ds} \int \nabla s ^2 \mathbf{g} \mathbf{j} \mathbf{a} \mathbf{c} d\theta d\xi$
G22	$\langle \frac{1}{g} \left \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right ^2 \rangle$	$\frac{\mathbf{raver}^2}{dV/ds} \int \frac{\left \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right ^2}{\mathbf{g} \mathbf{j} \mathbf{a} \mathbf{c}} d\theta d\xi$
G33	$\langle R_0^2 \nabla\xi ^2 \rangle$	$(\mathbf{r}0)^2 \frac{1}{dV/ds} \int \nabla\xi ^2 \mathbf{g} \mathbf{j} \mathbf{a} \mathbf{c} d\theta d\xi$

cual vamos a plantear integrando la expresión diferencial $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Recordemos que la expresión para las componentes contravariantes del rotacional es

$$(\nabla \times \mathbf{B})^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_j}{\partial z^i} - \frac{\partial B_i}{\partial z^j} \right); i, j, k \in \{\rho, \theta, \xi\},$$

donde hay que respetar el orden de los índices y sus permutaciones cíclicas. Así, y dado que $B_\rho = 0$,

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial B_\xi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial B_\theta}{\partial \rho} \mathbf{e}_\xi = \mu_0 J^\theta \mathbf{e}_\theta + \mu_0 J^\xi \mathbf{e}_\xi.$$

Los vectores base son $\mathbf{e}_j = \partial \mathbf{r} / \partial z^j$. Aquí también hemos aprovechado que, tratándose de una configuración magnética confinante, no hay corriente radial: $J^\rho = 0$. El flujo del campo vectorial \mathbf{J} a través de una superficie ξ cte. es la corriente toroidal I , mientras que lo análogo para θ cte. es la corriente poloidal que llamaremos F . Los correspondientes elementos de superficie son particularmente sencillos en estas coordenadas y ya hemos hecho uso de ello:

$$d\mathbf{S}_\xi = \sqrt{g} \nabla \xi d\rho d\theta \quad (4.1)$$

$$d\mathbf{S}_\theta = \sqrt{g} \nabla \theta d\rho d\xi. \quad (4.2)$$

Al tener estos elementos de superficie en componentes covariantes y \mathbf{J} en contravariantes, el producto escalar es inmediato. Tenemos:

$$I(\rho) = \int_{\xi \text{ cte.}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_\xi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho d\rho J^\xi \sqrt{g} \quad (4.3)$$

y

$$F(\rho) = \int_{\theta \text{ cte.}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_\theta = \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\rho d\rho J^\theta \sqrt{g}, \quad (4.4)$$

que, tras sustituir las componentes de \mathbf{J} dadas por el rotacional del campo, quedan

$$I(\rho) = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_\theta d\theta \quad (4.5)$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_\xi d\xi. \quad (4.6)$$

Es particularmente conveniente la expresión de \mathbf{B} en sus componentes contravariantes, pues éstas se relacionan de manera simple con los flujos magnéticos cuando las coordenadas son magnéticas [10] (véase la nota ** de la p. 5). A veces, como sucede con las coordenadas usadas en g3d, no se cumple la condición de que las líneas de campo magnético sean rectas en el plano de las coordenadas angulares. Veamos cómo se relacionan los flujos magnéticos con F e I en tal caso. Supondremos, no obstante, que existe una coordenada $\theta^* = \theta + \lambda(\rho, \theta, \xi)$ tal que la tríada (ρ, θ^*, ξ) es magnética y por lo tanto

$$B^{\theta^*} = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}}\psi' \quad (4.7)$$

$$B^\xi = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}}\phi'. \quad (4.8)$$

Conviene recordar* que \mathbf{B} puede expresarse de manera general como el producto vectorial del gradiente de una coordenada radial (perpendicular en cada punto a la correspondiente superficie de flujo) por el gradiente de un campo escalar $\alpha(\rho, \theta, \xi)$ definido en el intervalo de periodicidad angular $[0, 2\pi)$ que etiqueta las distintas líneas de campo: $\mathbf{B} = \nabla\rho \times \nabla\alpha = \nabla\rho \times \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\nabla\theta + \frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\nabla\xi \right)$. La geometría toroidal, es decir, la periodicidad, impone que la función α más general dada una superficie ρ pueda expresarse como una recta en el plano θ - ξ desplazada por una función periódica $\alpha_p(\rho, \theta, \xi)$:

$$\alpha(\rho, \theta, \xi) = b(\rho)\theta + c(\rho)\xi + \alpha_p(\rho, \theta, \xi). \quad (4.9)$$

No es difícil comprobar que la periodicidad de α_p implica las relaciones $\psi' = -2\pi c(\rho)$ y $\phi' = 2\pi b(\rho)$. En el caso de una tríada ρ, θ^*, ξ de coordenadas magnéticas se tiene entonces, y por definición, $\alpha_p(\rho, \theta^*, \xi) = 0$, de donde se obtienen las relaciones Ecs. 4.7 y 4.8. Pero ahora estamos considerando una tríada más general ρ, θ, ξ en la que $\alpha_p \neq 0$ y en vez de las Ecs. 4.7 y 4.8 encontramos

$$B^\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\psi'}{2\pi} - \frac{\partial\alpha_p}{\partial\xi} \right) \quad (4.10)$$

$$B^\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\phi'}{2\pi} - \frac{\partial\alpha_p}{\partial\theta} \right). \quad (4.11)$$

Introduciendo θ^* tenemos

$$B^\theta = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left(\psi' - 2\pi \frac{\partial\alpha_p}{\partial\theta^*} \frac{\partial\theta^*}{\partial\xi} \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left[\psi' - 2\pi \frac{\partial\alpha_p}{\partial\theta^*} \frac{\partial\lambda}{\partial\xi} \right] \quad (4.12)$$

$$B^\xi = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left(\phi' + 2\pi \frac{\partial\alpha_p}{\partial\theta^*} \frac{\partial\theta^*}{\partial\theta} \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left[\phi' + 2\pi \frac{\partial\alpha_p}{\partial\theta^*} \left(1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right) \right] \quad (4.13)$$

y de la condición $\alpha(\rho, \theta^*, \xi) = b(\rho)\theta^* + c(\rho)\xi$ obtenemos

*Se recomienda al lector tener a mano alguna referencia sobre coordenadas magnéticas en sistemas toroidales, como p. ej. la Ref. [10].

$$\frac{\partial \alpha_p}{\partial \theta^*} = \frac{\phi'}{2\pi}.$$

En definitiva, encontramos que en coordenadas no necesariamente magnéticas hay que considerar las funciones $\lambda_\theta = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ y $\lambda_\xi = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi}$; y que por lo tanto la relación entre las componentes contravariantes de \mathbf{B} y las derivadas radiales de los flujos magnéticos incorpora términos cruzados:

$$B^\theta = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} (\psi' - \lambda_\xi \phi')$$

$$B^\xi = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} (1 + \lambda_\theta) \phi'.$$

Compárese con las Ecs. 4.7 y 4.8. Obviamente, las expresiones coinciden si λ es una constante. Podemos ahora retornar a la ley de Ampère (Ecs. 4.5 y 4.6) y sustituir las componentes del campo magnético tras subir los índices:

$$I(\rho) = \frac{\psi'}{\mu_0} \int_0^{2\pi} g_{\theta\theta} d\theta + \frac{\phi'}{\mu_0} \int_0^{2\pi} [-g_{\theta\theta} \lambda_\xi + g_{\theta\xi} (1 + \lambda_\theta)] d\theta$$

$$F(\rho) = \frac{\psi'}{\mu_0} \int_0^{2\pi} g_{\xi\theta} d\xi + \frac{\phi'}{\mu_0} \int_0^{2\pi} [-g_{\xi\theta} \lambda_\xi + g_{\xi\xi} (1 + \lambda_\theta)] d\xi.$$

Puesto que las integrales abarcan sólo términos relativos a la geometría magnética, se define la *matriz de susceptancia** como la relación lineal (formalmente) entre las corrientes y las derivadas de los flujos magnéticos,

$$\mu_0 \begin{pmatrix} I \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi' \\ \phi' \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

y que en nuestro caso está formada por los coeficientes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_{\theta\theta}}{\sqrt{g}} d\theta & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_{\theta\xi}(1+\lambda_\theta) - g_{\theta\theta}\lambda_\xi}{\sqrt{g}} d\theta \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_{\xi\theta}}{\sqrt{g}} d\xi & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_{\xi\xi}(1+\lambda_\theta) - g_{\xi\theta}\lambda_\xi}{\sqrt{g}} d\xi \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Si las condiciones que se pretende describir admiten considerar que la geometría magnética no cambia, la susceptancia es constante. Sin embargo, es obvio que la relación entre los flujos y las corrientes no es lineal en la medida en que las propias corrientes varíen los coeficientes métricos. Véase una discusión más amplia de esto en la Ref. [5]. Aquí desconsideraremos este caso, algo razonable para un estelarador sin corrientes operando a baja β , o baja relación entre las presiones termodinámica y magnética.

En la aproximación unidimensional al transporte es normal, como ya hemos señalado, trabajar con promedios a la superficie de flujo en tanto esto sea posible. La definición Ec. 2.2 permite verificar de inmediato que

$$V'(\rho) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g} d\theta d\xi.$$

*En la Ref. [5], además de aparecer esta definición, se hace este mismo desarrollo de manera resumida.

Así, el hecho de que las corrientes F e I son funciones espaciales de ρ permite añadir una integración en $d\xi$ a la componente de I y una integración en $d\theta$ a la componente de F en la Ec. 4.15 para obtener una matriz de susceptancia en términos de promedios a la superficie de flujo. Por ejemplo,

$$\mu_0 \int_0^{2\pi} I(\rho) d\xi = 2\pi \mu_0 I(\rho) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi d\theta \frac{g_{\theta\theta}}{g} \sqrt{g} d\theta d\xi \right] \psi' + [\dots] \phi',$$

de donde $\mu_0 I(\rho) = \frac{V'(\rho)}{4\pi^2} \left\langle \frac{g_{\theta\theta}}{g} \right\rangle \psi' + \dots$. Procediendo así con cada término se obtiene

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{V'(\rho)}{4\pi^2} \begin{pmatrix} \left\langle \frac{g_{\theta\theta}}{g} \right\rangle & \left\langle \frac{g_{\theta\xi}(1+\lambda_\theta) - g_{\theta\theta}\lambda_\xi}{g} \right\rangle \\ \left\langle \frac{g_{\xi\theta}}{g} \right\rangle & \left\langle \frac{g_{\xi\xi}(1+\lambda_\theta) - g_{\xi\theta}\lambda_\xi}{g} \right\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

expresión que se simplifica bastante en dos casos particulares pero comunes: el caso axisimétrico, para el cual $g_{\theta\xi} = 0 = g_{\xi\theta}$; y especialmente el caso de coordenadas magnéticas, para el cual $\lambda_\xi = 0 = \lambda_\theta$. Topamos aquí con la circunstancia típica del TJ-II: ninguna de las simplificaciones anteriores es de partida válida.

Observemos de momento que la matriz de susceptancia Ec. 4.14 establece relaciones interesantes. P. ej., invirtiendo la relación encontramos que la transformada rotacional es

$$t = \frac{\psi'}{\phi'} = \frac{S_{22}I - S_{12}F}{S_{11}F - S_{21}I}, \quad (4.17)$$

donde es evidente que, en ausencia de corriente neta toroidal,

$$t_{I=0} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}$$

independiente de F (salvo $F = 0$, lo que obliga a que el determinante de la matriz de susceptancia sea nulo, que es como que exista proporcionalidad entre F e I). Claramente, también, la axisimetría impone que si $I = 0$ entonces $t = 0$.

Acabamos de mencionar la dificultad que encontramos en el TJ-II. Vamos a hacer una de las simplificaciones para estimar la bondad de la otra. Optamos por calcular los promedios de la matriz de susceptancia Ec. 4.16 desconsiderando la función λ . Aquí estamos suponiendo que las coordenadas de $\mathbf{g3d}$ son magnéticas, lo que no es cierto. Recordemos que $\lambda(\rho, \theta, \xi)$ es la diferencia en cada punto entre el θ de $\mathbf{g3d}$ y un ángulo poloidal de coordenadas magnéticas. Dada una superficie de flujo, tanto θ como la coordenada magnética θ^* son periódicas, de manera que los extremos coinciden. Necesariamente, entonces, las derivadas λ_θ y λ_ξ cambian de signo al promediar a la superficie de flujo en la Ec. 4.16. Por esto esperamos que, cuando menos, los órdenes de magnitud del promedio que calculamos coincidan con los de la verdadera matriz de susceptancia en vacío. Calculemos, pues, los coeficientes

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{V'(\rho)}{4\pi^2} \begin{pmatrix} \left\langle \frac{g_{\theta\theta}}{g} \right\rangle & \left\langle \frac{g_{\theta\xi}}{g} \right\rangle \\ \left\langle \frac{g_{\xi\theta}}{g} \right\rangle & \left\langle \frac{g_{\xi\xi}}{g} \right\rangle \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

donde la tríada (ρ, θ, ξ) corresponde a las coordenadas de la librería $\mathbf{g3d}$ exceptuando que la coordenada radial aquí se dimensiona haciendo $\rho = as$, como se ha advertido en la Sec. 3. A modo de referencia, calculamos también la susceptancia

que correspondería a una geometría simple pero ficticia. La Fig. 1 muestra los valores diagonales de la matriz Ec. 4.18 para la geometría del TJ-II (configuración 100_44_64) obtenida mediante los archivos de la librería `g3d` en función del radio menor normalizado, s . Por comparación se muestran también los valores correspondientes a un toro. Se ha verificado, además: que los resultados para el toro coinciden muy bien cuando se integra numéricamente en vez de usar las expresiones analíticas (una manera de comprobar la integración numérica); y que el acuerdo entre el caso del toro y los resultados que se obtienen de `g3d` cuando se activa la opción de simetrización de la geometría* coinciden aceptablemente.

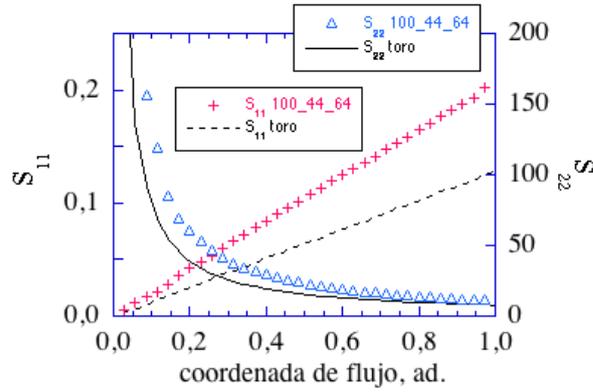


FIGURA 1. Cálculo de los coeficientes diagonales de la matriz de susceptancia para la configuración 100_44_64 del TJ-II (obtenida de la librería `g3d`) y para un toro.

Para facilitar la interpretación de la Fig. 1 mostramos resumidamente los cálculos que llevan al caso tórico. Sea un toro centrado en el origen, de radio mayor R_0 , y cuyo plano meridional es $z = 0$. Llamando ρ al radio menor, ξ al ángulo toroidal y θ al poloidal de manera que la correspondiente base covariante forme un triedro dextrógiro, se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} x &= (R_0 + \rho \cos \theta) \cos \xi \\ y &= -(R_0 + \rho \cos \theta) \sin \xi \\ z &= \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

La matriz jacobiana para esta transformación del espacio euclídeo (E) al toro (T) es

$$\mathbb{J}_{E \rightarrow T} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \xi)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \xi & -\rho \sin \theta \cos \xi & -(\rho \cos \theta + R_0) \sin \xi \\ -\cos \theta \sin \xi & \rho \sin \theta \sin \xi & -(\rho \cos \theta + R_0) \cos \xi \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

*En la llamada a la inicialización de la geometría se puede usar una “bandera” para obtener los datos correspondientes a un tokamak sin helicidad en el eje magnético y con superficies magnéticas de sección transversal circular. El campo toroidal en el eje es igual al valor promedio del correspondiente a la configuración elegida y decrece como $1/R$.

cuyo determinante, o jacobiano, es $\rho(\rho \cos \theta + R_0)$. Es igualmente fácil comprobar que el tensor métrico formado por los productos escalares de los vectores tangentes a las líneas coordenadas viene dado por

$$\mathbb{G}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\rho \cos \theta + R_0)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

de donde obtenemos rápidamente los elementos diagonales de la Ec. 4.18 al observar que:

$$\left\langle \frac{g_{\theta\theta}^T}{g^T} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle \approx \frac{1}{R_0^2}; \quad \left\langle \frac{g_{\xi\xi}^T}{g^T} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle = \frac{1}{\rho^2}$$

y que $V' = S^T = 4\pi^2 R_0 \rho$. Así, tenemos $S_{11}^T \approx \rho/R_0$ y $S_{22}^T = R_0/\rho$. La Fig. 1 se ha obtenido usando $R_0 = 1,5$ m. Es interesante observar que la diagonal de la matriz de susceptancia se obtiene con independencia de la transformada rotacional: la métrica del toro impone automáticamente unos valores S_{11} y S_{22} . Es obvio que, interpretando las líneas coordenadas del toro como líneas de campo magnético, los vectores $\partial \mathbf{r}/\partial \theta$ y $\partial \mathbf{r}/\partial \xi$ son perpendiculares (no hay transformada rotacional) y los elementos cruzados $g_{\theta\xi}^T = g_{\xi\theta}^T = 0$, como corresponde a un caso axisimétrico.

Lo importante de los cálculos anteriores es que el cálculo de la transformada rotacional de vacío tomando las coordenadas de $\mathbf{g3d}$ como si de coordenadas magnéticas se tratara, viene a ser un 85 ó 90 % del valor real (véase la Fig. 2). De esta manera podemos ver que la descripción de la relación entre flujos para la geometría del TJ-II obtenida mediante los coeficientes de $\mathbf{g3d}$ no es mala para estimar ι . Así, los cálculos de la evolución temporal de ι mediante ASTRA frente a corrientes inducidas en el TJ-II, no deben estar mal estimados si se impone el promedio $\langle g_{\theta\theta}/g \rangle$ obtenido de $\mathbf{g3d}$ (ver Ec. 2.13). De paso, al observar en la Fig. 1 que S_{11} para el TJ-II es considerablemente mayor que para un toro*, deducimos de la Ec. 4.17 que el TJ-II presenta una resistencia comparativamente grande a variar la transformada rotacional frente a corrientes toroidales. Recordaremos esto en la Sec. 6.

5. Ley de Faraday y evolución de la transformada rotacional

En la Ec. 2.7 hemos hecho uso del flujo magnético poloidal ψ . De manera análoga se define el flujo magnético toroidal, luego tenemos para ambos

$$\psi(\rho) = \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\rho d\rho \sqrt{g} B^\theta \quad (5.1)$$

$$\phi(\rho) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho d\rho \sqrt{g} B^\xi. \quad (5.2)$$

La ley de Faraday relaciona la variación temporal de estos flujos con los voltajes inducidos en circuitos apropiados. A su vez, y dado que $\iota = \psi/\phi = \psi'/\phi'$, es natural relacionar la evolución de los flujos magnéticos con la de la transformada rotacional.

*En un toro hemos visto que el cociente S_{22}^T/S_{11}^T vale aproximadamente $(R_0/\rho)^2$, de manera que aumenta con la relación de aspecto al cuadrado.

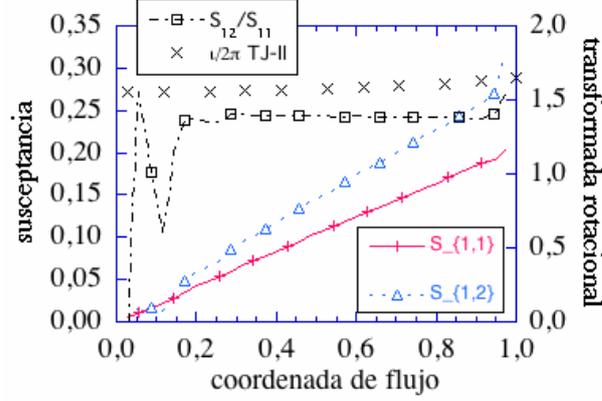


FIGURA 2. Cálculo del coeficiente cruzado de la matriz de susceptancia y de la transformada rotacional que correspondería a considerar las coordenadas de $g3d$ como magnéticas. Para comparar, se muestra también t para la correspondiente configuración de vacío en el TJ-II.

Pero nos interesa particularmente conocer la respuesta del sistema a la inducción de una corriente óhmica, de manera que relacionaremos la componente paralela de la ley de Ohm en el plasma con las variaciones temporales de los flujos. Volviendo a la ley de inducción, $\partial\Phi_B/\partial t = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, tenemos los casos de interés

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \oint \mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi} d\xi = \int_0^{2\pi} E^\xi d\xi = \int_0^{2\pi} E^\xi(\rho=0) d\xi - \int_0^{2\pi} E^\xi(\rho) d\xi \\ &= V_{ind}^\xi(\rho) - V_{ind}^\xi(0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

para un circuito que bordee una banda toroidal apoyada en el eje magnético ($\rho=0$), y

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \int_0^{2\pi} E^\theta(\rho) d\theta = -V_{ind}^\theta(\rho) \quad (5.4)$$

para un circuito poloidal en torno al eje magnético. Aquí hemos llamado V_{ind}^ξ y V_{ind}^θ a los voltajes inducidos en los respectivos circuitos toroidal y poloidal. Estos voltajes están relacionados con las corrientes inducidas en el plasma. De hecho sólo nos interesan las corrientes inductivas no confinantes, es decir, que no existen en el equilibrio MHD. Llamando \mathbf{J} a la densidad de corriente total y \mathbf{J}_f a la densidad de corriente debida a fuentes no inductivas (por ejemplo la corriente de *bootstrap*), la componente paralela de la ley de Ohm en un plasma de resistividad paralela $\eta_{||}$ es $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \eta_{||} (\mathbf{J} - \mathbf{J}_f) \cdot \mathbf{B}$. Hallemos el promedio a la superficie de flujo (ver Ec. 3.3) de esta cantidad:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle &= \frac{1}{V'} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\xi \sqrt{g} (B^\theta E_\theta + B^\xi E_\xi) \Rightarrow \\ \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle V' &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\xi \sqrt{g} B^\theta E_\theta + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\xi B^\xi E_\xi. \end{aligned}$$

Estas integrales se pueden calcular integrando por partes* al observar, a partir de las Ecs. 5.1 y 5.2, que

$$\psi'(\rho) = \int_0^{2\pi} d\xi \sqrt{g} B^\theta \quad (5.5)$$

$$\phi'(\rho) = \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{g} B^\xi. \quad (5.6)$$

Tenemos, entonces,

$$\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle V' = \int_0^{2\pi} d\theta E_\theta \phi' + \int_0^{2\pi} d\xi E_\xi \psi'$$

que, por las relaciones Ec. 5.3 y Ec. 5.4, resulta

$$\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle V' = \phi' \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_{ind}^\xi(0) \right] - \psi' \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

o bien,

$$\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{V'}{\phi'} = \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + V_{ind}^\xi(0) - \psi' \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Tomemos ahora una derivada radial para eliminar el voltaje inducido y conmutemos derivadas espaciales y temporales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\partial V}{\partial \phi} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle \right] &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\psi' \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right] - \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \psi' \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right] \Rightarrow \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Combinando la componente paralela de la ley de Ohm con el promedio a la superficie de flujo de la cantidad $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ hemos obtenido una ecuación de evolución para la transformada rotacional. Para relacionarla con los elementos de la matriz de susceptancia usaremos la relación (véase la Ec. 11 en la Ref. [5]) $\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \rho} = \mu_0 (FI' - IF')$ escrita en la forma

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\mu_0}{\phi'} (FI' - IF'),$$

de manera que el término de la ley de Ohm en la Ec. 5.7 puede escribirse como

$$\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi} = \eta_{\parallel} \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi} - \eta_{\parallel} \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi} =$$

*P. ej., tómesese una variable $u = E_\theta$ en la primera integral del promedio, y considérese $dv = d\xi \sqrt{g} B^\theta$. Entonces $\int_0^{2\pi} d\xi \sqrt{g} B^\theta E_\theta = E_\theta \int_0^{2\pi} d\xi \sqrt{g} B^\theta - \oint dE_\theta \left[\int_0^\xi d\xi \sqrt{g} B^\theta \right] = E_\theta \phi'$, ya que la primitiva de la integral indefinida entre corchetes, por la periodicidad del toroide, adopta valores idénticos en los extremos de la integración. La segunda integral del promedio es análoga.

$$\eta_{\parallel} \frac{\mu_0}{\phi'} (FI' - IF') - \eta_{\parallel} \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi};$$

y dado que $\partial V / \partial \phi = V' / \phi'$, podemos reexpresar la Ec. 5.7 como

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial t} &= \frac{\partial t}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{\phi'} \eta_{\parallel} \mu_0 (FI' - IF') - \frac{1}{\phi'} \eta_{\parallel} \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{B} \rangle V' \right] = \\ &= \frac{\partial t}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{\phi'} \eta_{\parallel} \mu_0 F^2 \left(\frac{I}{F} \right)' - \frac{1}{\phi'} \eta_{\parallel} \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{B} \rangle V' \right]. \end{aligned}$$

El objeto de escribir así la Ec. 5.7 es poder relacionarla con la matriz de susceptancia Ec. 4.14, según la cual se cumple

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{F} \right)' &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{S_{11} t + S_{12}}{S_{21} t + S_{22}} \right); \\ F^2 &= \frac{(\phi')^2}{\mu_0^2} (S_{21} t + S_{22})^2. \end{aligned}$$

Haciendo estas sustituciones es inmediato ver que

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{\eta_{\parallel}}{\mu_0} \phi' (S_{21} t + S_{22})^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{S_{11} t + S_{12}}{S_{21} t + S_{22}} \right] - \eta_{\parallel} \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{B} \rangle \frac{\partial V}{\partial \phi} \right\}, \quad (5.8)$$

que es la ecuación 22 de la Ref. [5]. Se pueden encontrar distintas expresiones según se escoja la coordenada radial. Si tomamos, como se hace en **g3d** salvo normalización, una coordenada radial $\rho = \sqrt{\phi}$, la Ec. 5.8 adopta la forma

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial t}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{\eta_{\parallel}}{\mu_0} \rho (S_{21} t + S_{22})^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{S_{11} t + S_{12}}{S_{21} t + S_{22}} \right] - \frac{\eta_{\parallel}}{4\rho} V' \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{B} \rangle \right\}. \quad (5.9)$$

Si, como es el caso del TJ-II debido a su razón de aspecto, $S_{22} \gg S_{11}, S_{12}, S_{21}$; entonces la ecuación es parecida a la que se obtendría en un caso axisimétrico en el que los términos cruzados de la susceptancia son nulos. Para simplificar, sea el caso en el que $\mathbf{J}_f = 0$ y la forma de las superficies de flujo se mantiene:

$$\frac{\partial t}{\partial t} \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{\eta_{\parallel}}{\mu_0} \rho S_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{S_{11}}{S_{22}} t \right) \right\}; \quad (5.10)$$

expresión que, en el caso de un toro, resulta

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta_{\parallel}}{\mu_0} r^2 t \right) \right],$$

como puede comprobarse usando la Ec. 4.18 para la matriz de susceptancia (en el caso del toro es obvio que las coordenadas son “magnéticas”) y la métrica del toro Ec. 4.19.

Al final de la Sec. 2 hemos comentado que la correcta descripción de la densidad de corriente toroidal necesita tener en cuenta los términos cruzados originados por $g_{\theta\xi}$. Al igual, la Ec. 5.9 incluye los términos S_{12} y S_{21} pero encontramos razonable resolver la parte de “difusión” de la transformada rotacional a la manera de la Ec. 5.10, donde los términos cruzados de la susceptancia son nulos. Por otro lado, afinar

el cálculo quizás carezca de sentido en tanto no se considere el problema no lineal completo: como se ha advertido, la propia matriz de susceptancia Ec. 4.15 debe cambiar en presencia de corrientes que, al fin y al cabo, alteran la geometría.

6. Comparación entre ASTRA 6.0 y un código ajustado a la métrica del TJ-II

Se ha escrito un código de transporte para calcular directamente la evolución de plasmas simulados mediante modelos *ad hoc* con la geometría promedio para el TJ-II. El objetivo es doble: por un lado se pretende confirmar que la descripción de la métrica según se ha impuesto en ASTRA es aceptable, al menos en lo que a promedios respecta; por otro, la versatilidad de ASTRA conviene para estudiar modelos que, posteriormente, podrán incluirse en el código escrito, algo conveniente si se quiere utilizar como complemento a otros códigos de cálculo.

En primer lugar, mostraremos los coeficientes métricos para una configuración concreta del TJ-II (100_44.64) según se obtienen de *g3d* para su uso en el código de transporte, junto a los mismos coeficientes adaptados por el sistema ASTRA. Así lo vemos en la Fig. 3, donde se representan los siguientes perfiles radiales. En rojo, de izda. a dcha. y de arriba a abajo: la cizalla magnética –que es negativa–, el volumen del plasma de *g3d* (aspas) y el adoptado por ASTRA (línea), idem para la superficie lateral, τ , y los coeficientes métricos promediados a cada superficie de flujo. Las magnitudes representadas en azul no son de interés aquí.

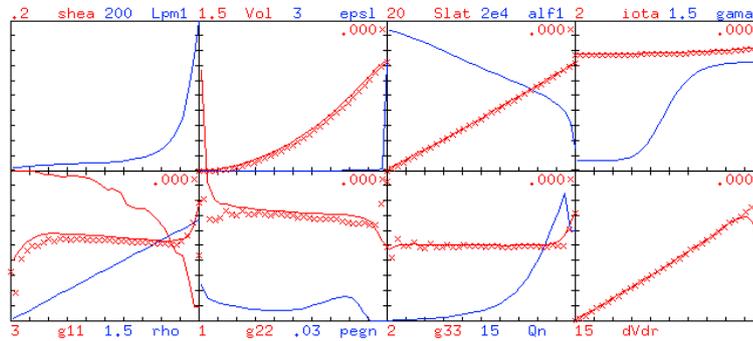


FIGURA 3. Resultados del estado estacionario correspondiente al modelo simple de transporte obtenidas con ASTRA (líneas) partiendo de las condiciones de equilibrio calculadas con el código de transporte para el TJ-II (aspas).

Podemos observar que se obtienen diferencias apreciables en las fronteras del cálculo. De especial interés para los cálculos del transporte son las magnitudes g^{11} y V' (véase la Ec. 2.5 y comentarios subsiguientes), siendo V' la más crítica porque difiere precisamente en el borde, donde la integración de magnitudes del plasma va a verse más afectada. Veamos cómo se transfieren estas discrepancias al transporte. Usando esta geometría hemos calculado el estado estacionario que correspondería al modelo sencillo que sigue. Consideremos unas fuentes de partículas, S_n , y calor, P_{ECH} , fijas y comunes a los dos cálculos (ASTRA y el código para el TJ-II); y unos coeficientes de transporte constantes para las partículas, $D_e = 0,01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$; y para el calor, $\chi_e = 3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. El modelo simple consiste en las ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nabla \cdot \Gamma_e + S_e = -\nabla \cdot (-D_e \nabla n_e) + S_e \quad (6.1)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial (n_e T_e)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(-n_e \chi_e \nabla T_e + \frac{5}{2} T_e \Gamma_e \right) + P_{ECH}. \quad (6.2)$$

Al tratarse de difusividades constantes y unas mismas fuentes en los dos cálculos, las diferencias deben venir de la geometría. En la Fig. 4 podemos ver los estados estacionarios obtenidos con el código para el TJ-II (aspas) y el obtenido con ASTRA. Ahora dibujamos también, en azul y siguiendo el convenio de aspadas para el código *ad hoc* y líneas para ASTRA, los gradientes de la densidad y de la temperatura electrónica (“grNe” y “grTe”); y las fuentes de electrones y de potencia de calentamiento (“Se” y “ECH”). Acabamos de ver en la Fig. 3 que la zona del borde del plasma no adopta bien el equilibrio impuesto (recuérdese que ASTRA utiliza una aproximación axisimétrica y los perfiles métricos se adaptan internamente a esta condición), de manera que la evaluación de los flujos en esa zona es distinta en los dos cálculos. Obviamente, la evaluación del estado estacionario en la zona del borde afecta a todo el interior del plasma; y mucho más al campo T_e , cuya difusividad es comparativamente mayor. El origen de estas discrepancias se encuentra en la evolución de los gradientes en el borde.

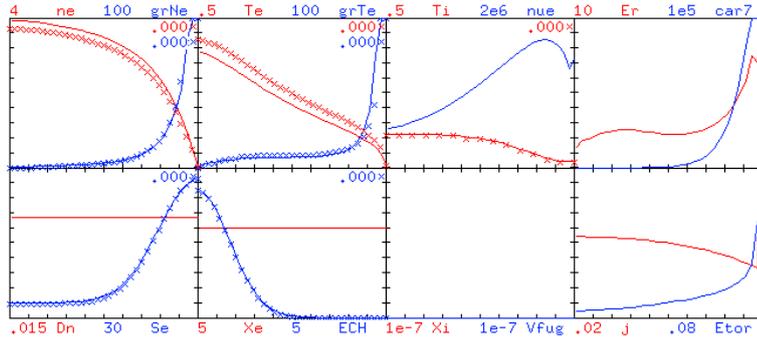


FIGURA 4. Perfiles correspondientes a la Fig. 3 dado el modelo Ecs. 6.1 y 6.2. En el estado estacionario, ASTRA obtiene $T_e(0) = 0,387 \text{ keV}$; $n_e(0) = 3,94 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$; $\tau_p = 201 \text{ ms}$; $\tau_E = 6,5 \text{ ms}$; $\mathcal{E}_t = 1,8 \text{ kJ}$; $\int S_e dV = 14,2 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$.

En el pie de la Fig. 4 vemos algunas magnitudes obtenidas por ASTRA. Mediante el código para el TJ-II se ha obtenido (aspas en la Fig. 4) $T_e(0) = 0,458 \text{ keV}$; $n_e(0) = 3,77 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$; $\tau_p = 186 \text{ ms}$; $\tau_E = 5,1 \text{ ms}$; energía térmica $\mathcal{E}_t = 1,49 \text{ kJ}$.

A continuación presentamos otra comparación, esta vez usando un modelo más elaborado para los coeficientes de transporte y con mucha más incidencia de los gradientes. Sustituimos las difusividades constantes del caso anterior por un modelo de transporte algo más ajustado al comportamiento de los plasmas del TJ-II calentados por microondas (véase la Ref. [3]). Consideraremos, primero, un campo ε asociado al nivel de transporte anómalo. Definimos la intensidad de dicho campo como

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha_1} = \frac{\gamma_0 \frac{|\nabla(n_e T_e)|}{n_e T_e}}{\alpha_1} = \frac{\gamma_0}{\alpha_1 L_p},$$

esto es, como si fuera el nivel de saturación de una magnitud turbulenta cuyo crecimiento lineal es $\gamma \propto 1/L_p$ que modulamos mediante una función

$$\gamma_0 = \delta + \frac{a_1}{(1 + (\rho_c/s)^7)}$$

para asegurar valores elevados en la región del borde. Las constantes δ , a_1 , ρ_c se han fijado en los cálculos tanto en el código para el TJ-II como en ASTRA (véase el apéndice). La difusividad electrónica será:

$$D_e = D_{e0} + \varepsilon. \quad (6.3)$$

siendo D_{e0} una difusividad constante igual a la usada en el modelo simple anterior. En cuanto a la difusividad térmica electrónica, tomamos una fuerte dependencia con la fracción de partículas atrapadas, $f_a \propto \sqrt{\rho}$,

$$\chi_e = \chi_{e0} + a_2 f_a^3 \rho^2 \nu_e. \quad (6.4)$$

Aquí, ν_e es la colisionalidad, a_2 otra constante de ajuste que también se ha fijado, y χ_{e0} la difusividad térmica constante del modelo simple. El objetivo no es hacer un modelo detallado del transporte en el TJ-II sino uno con el suficiente acoplo entre densidad y temperatura como para poder verificar los cálculos con ASTRA imponiendo la geometría del TJ-II. Así, las Ecs. 6.3 y 6.4 acoplan fuertemente n_e y T_e a través de $1/L_p$, el gradiente normalizado de la presión electrónica.

La Fig. 5 compara lo obtenido mediante los dos cálculos. Como antes, las aspas son los resultados del código para el TJ-II basado en la geometría según g3d, mientras que las líneas son los resultados de ASTRA (esta figura, como las Figs. 3 y 4, son ventanas gráficas del entorno ASTRA). Podemos observar que las discrepancias se acentúan con respecto a las encontradas para un modelo más sencillo. En particular, los perfiles de la longitud inversa característica del gradiente de la densidad, $1/L_n$; y de lo propio para la temperatura electrónica, $1/L_T$, difieren en algunas regiones en los correspondientes estados estacionarios (magnitudes “iLNe” e “iLTe” en la Fig. 5). El estado estacionario obtenido mediante el código para el TJ-II da $T_e(0) = 0,890$ keV; $n_e(0) = 1,19 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$; $\tau_p = 36$ ms; $\tau_E = 1,2$ ms; $\mathcal{E}_t = 0,35$ kJ.

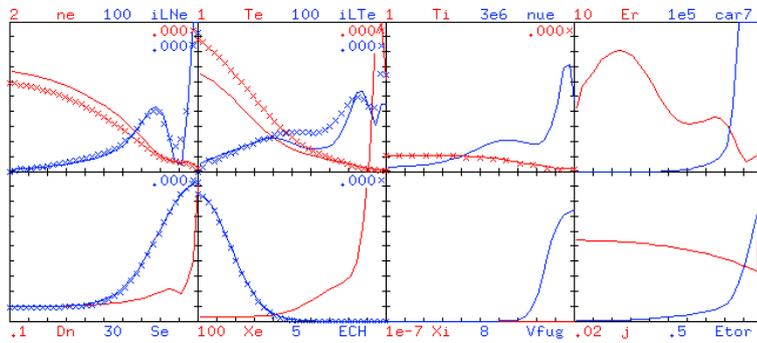


FIGURA 5. Perfiles correspondientes a la Fig. 3 dado el modelo Ecs. 6.3 y 6.4. En el estado estacionario, ASTRA obtiene $T_e(0) = 0,655$ keV; $n_e(0) = 1,33 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$; $\tau_p = 41$ ms; $\tau_E = 1,5$ ms; $\mathcal{E}_t = 0,41$ kJ.

En definitiva, los estudios de transporte efectuados con ASTRA tras incorporar la geometría del TJ-II hasta donde es actualmente posible, son válidos salvo por pequeñas discrepancias en la frontera del cálculo. Esto no es distinto a un problema típico del cálculo del transporte en general, a saber, que las condiciones de contorno son muy importantes. Con esto en cuenta, ASTRA puede considerarse bien adaptado a la geometría del TJ-II.

7. Inducción de corriente en el TJ-II

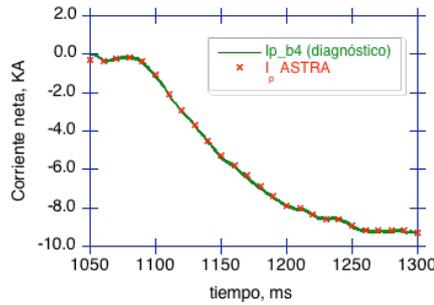


FIGURA 6. Evolución de la corriente neta en la descarga n° 7045 del TJ-II (línea) y datos tomados como condición de contorno variable para el cálculo con ASTRA (aspas).

Un problema mayor que el de la Sec. 6 sería de esperar en la evolución de la transformada rotacional, pues aquí intervienen más elementos métricos y las simplificaciones impuestas a la geometría en ASTRA son más severas. Procedamos a usar ASTRA para calcular la evolución de τ . De las varias maneras en que se pueden elegir las condiciones de contorno para obtener la evolución de τ elegimos la más conveniente en el TJ-II: la corriente neta del plasma. La razón es que esta magnitud se obtiene experimentalmente mediante las bobinas de *Rogowski* y resulta fácil imponerla como función del tiempo en los archivos experimentales que lee ASTRA. En la Fig. 6 podemos ver la corriente neta del plasma I_p obtenida suavizando la señal del diagnóstico en la descarga n° 7045 del TJ-II (línea) junto a los datos que se han transferido al archivo experimental que usa ASTRA para tomar la evolución de las condiciones de contorno (aspas). ASTRA interpola linealmente el valor entre datos.

En la Fig. 7 se presentan los cálculos de la evolución de τ en la misma descarga. Para interpretar correctamente estos cálculos hay que tener presente que, salvo que se impongan modelos para el forzado de corrientes no inductivas, en ASTRA se asume que I_p se debe enteramente a un proceso de inducción. De esta manera, ASTRA obtiene el perfil de la densidad de corriente que, compatible con la conductividad del plasma impuesta, explica la corriente neta usada como condición de contorno. En el caso de la Fig. 7 toda la corriente se achaca a la inducción de una fuerza electromotriz porque no hay términos añadidos. En un próximo trabajo se deben comparar estos resultados con el cálculo de la evolución de τ directamente mediante la Ec. 5.9. Es más, estos cálculos deben hacerse usando tanto los elementos Ec. 4.16 como los de la Ec. 4.18 para confirmar la bondad de **g3d** a este respecto. Por ahora,

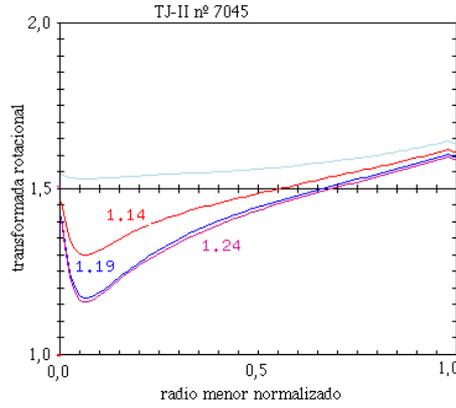


FIGURA 7. Evolución de la transformada rotacional para la descarga de TJ-II nº 7045 calculada con ASTRA. Se muestran perfiles a intervalos iguales de tiempo empezando cuando el perfil es prácticamente el de vacío, $t = 1,11$ s.

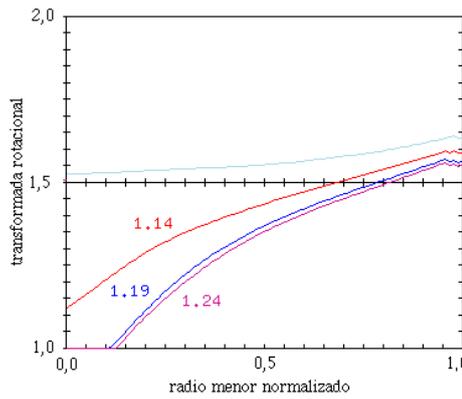


FIGURA 8. Evolución de t como en la Fig. 7 para la descarga de TJ-II nº 7045 pero calculada con una geometría toroidal pura.

nos remitimos a los resultados de la Sec. 4 para considerar la evolución de la Fig. 7 como válida.

Para concluir, reincidimos sobre el hecho de que el promedio $\langle g_{\theta\theta} \rangle$ para el TJ-II difiere considerablemente de lo esperable en un toro, de manera que, si bien la aproximación axisimétrica no parece mala para obtener la evolución de t , la aproximación cilíndrica sí lo es (véase, p. ej., la Fig. 1). Para ilustrar esto presentamos en la Fig. 8 los mismos cálculos de la Fig. 7 usando, en vez de la métrica promedio del TJ-II, la métrica de un toro. Al ser $\langle g_{\theta\theta}/g \rangle$ bastante mayor en la geometría del TJ-II que en la de un toro, las Ecs. 4.18 y 5.9 nos dicen que, aunque respondiendo con más rapidez a las condiciones de contorno, t en el TJ-II se estaciona en valores que difieren menos del valor de vacío que en el caso de un toro. Así lo vemos comparando las Figs. 7 y 8. Aparte de la región central, donde la evaluación de los coeficientes métricos siempre es problemática, es evidente que unos mismos valores de I_p a unos mismos tiempos dan lugar a un cambio de t mucho mayor en

el caso del toro, para el cual se calcula $\tau(0) < 1$ en el estacionario. Asimismo, el valor $\tau = 3/2$ llega mucho más cerca del borde del plasma en este caso.

8. Conclusiones

Se ha instalado la versión 6.0 de ASTRA, un paquete de programas para el análisis del transporte en plasmas axisimétricos. Tras hacer un repaso de los conceptos más relevantes para tratar las configuraciones magnéticas del TJ-II considerando esta limitación, se han realizado algunos cálculos comparativos. Se ha comprobado así que la evolución de modelos que sólo necesitan el cálculo de derivadas perpendiculares a las superficies de flujo se describen bien en ASTRA salvo por posibles afinaciones de las condiciones de contorno. En cuanto a los cálculos que involucran la forma de las superficies transversales (p. ej. los basados en la ley de Faraday), el uso de las coordenadas de `g3d` como si fueran magnéticas da una transformada rotacional de vacío en torno a un 90% menor que la del TJ-II. De esto, unido a la alta relación de aspecto del TJ-II, se infiere que la evolución de la transformada rotacional calculada mediante los promedios de los coeficientes métricos de `g3d` como si de coordenadas magnéticas se tratara es razonablemente precisa. Se advierte de que la aproximación cilíndrica, por contra, no es buena para esta geometría. Un próximo trabajo debe abordar el cálculo detallado de la evolución de la transformada rotacional usando coordenadas magnéticas y los coeficientes cruzados de la susceptancia. En todo este trabajo se considera que la geometría magnética del plasma equivale a la calculada en vacío.

Apéndice A. Código en ASTRA

El modelo de transporte usado tanto con el código para el TJ-II como con ASTRA es el mismo. Reproducimos a continuación las líneas con las que dicho modelo (Ecs. 6.1, 6.2) se ha escrito en el lenguaje de ASTRA [6].

```
!! MODELO TJ2d2a (D. López-Bruna. CIEMAT, 28-I-2004)
```

```
-----  
NEQUIL=-1; Para forzar la métrica de g3d.
```

```
Constantes iniciales/usadas
```

```
! CF1=1.0; ! D0  
! CF2=.01; ! Constante conductividad electrónica (xlamc)  
! CF3=0.3; ! k_perp x rho_s  
! CF4=.1; ! w0: escala radial turbulencia  
! CF5=0.05; ! Anchura (FGAUSS)  
! CF6=0.85; ! Centrado TANH en Vfuga  
! CF7=0.07; ! delta (TANHF en Vfuga)  
! CF8=3; ! Altura (FTANHF)  
! CF9=1.; ! Enrasado (TANHF en Vfuga)  
! CF10=0.17; ! Anchura deposición ECRH  
! CF11=0.2; ! Anchura Sneu
```

```

! CV10=0.0; ! Centrado ECRH
! CV11=1.0; ! Centrado Sneu
! CHE1=3; ! Constante conductividad térmica electrónica (xlamte)
! CHE2=100; ! Factor transporte anómalo Xe.
! CRAD1=0.9; ! Transferencia de potencia ECH-plasma
! QECR=0.3; ! Potencia ECRH (MW)

Calentamiento por ECH (una gaussiana)
!FGAUSS(CV10,CF10,CAR4):0.0001:0.000:0.0001:H;
CAR4=exp(-(RHO/ROC-CV10)**2/(2*CF10**2))/0.0632859

Fuente de electrones (se comentan; se tomará del archivo experimental).
!FGAUSS(CV11,CF11,CAR3):.0001:.0002:.0003:N;
!CAR3=exp(-(RHO/ROC-1.)**2/(2*CF11**2))

Coeficientes de transporte
CAR15=0.1+1./(1+(0.5/(RHO/ROC+.014))**7); ! gamma0
CAR16=1.e4*CF3/CF4*sqrt(TE) ! alpha1
CAR6=NE*TE; ! Pe
CAR5=-grad(CAR6); ! gradPe
CAR8=-grad(NEX)/NEX
CAR9=-grad(TEX)/TEX
CAR10=CAR5/NE; ! campo eléctrico radial

! Densidad electrónica
-----
NE:E; NEB=.05; NE=NEX;

Difusividad
DN=CF2 + abs(CF1*CAR15/CAR16*CAR5/CAR6);
CN=CF8*(CF9+tanh( (RHO/ROC-CF6)/CF7 ));

! Fuentes:
SN=SNX

Temperatura electrónica
-----
TE:F; TEB=0.01; TE=TEX;

! Conductividad térmica:
CAR7=(nue/(2000*TE/(RHO*RHO*BTOR)))*2
CAR1=4260*NE*ROC*ROC*(RHO/ROC)**3.5/sqrt(TE*TE*TE);
!CAR1=car1/(1+car7)
HE= CHE1 + CHE2*CAR1

CE=CHE4*CN ! Posible convección

! Fuentes:
PE=0.9*QECR*CAR4;

```

Flujo poloidal

 MV=MVX
 CU:A; CC=CCSP;
 CU=CC; CU=CUX;

Perfiles radiales

Perfiles principales

ne\NE\NEX\4; Te\TE\TEX\5; Ti\TI\TIX\5; Er\CAR10;
 Dn\DN; Xe\HE\5; Xi\; j\CU\6;

grNe\CAR8\CAR8X; grTe\CAR9\CAR9X; nue\nue;car7\car7\1;
 Se\SN\SNX; ECH\PE\PEX; Vfug\CN;Etor\ULON/GP2*RTOR;

Geometría

shea\shear ; Vol\volum\CAR1X ; Slat\slat\slatX ; iota\MV\MVX
 g11\G11\VR\G11X; g22\G22\rho/RTOR/RTOR\G22X; g33\G33\G33X; dVdr\VR\VRX

Transporte anómalo

Lpm1\CAR5\CAR6; epsl\CAR15*car5/car16/car6;alf1\CAR16;
 gama0\CAR15;

Otros

rho\RHO/ROC; pegn\PEGN; Qn\QN;

Señales temporales

Te0_TEC_-1; taup_TAUPB_-2; XrtR_QECR; ne0_NEC;
 Ti0_TIC_-1; tauE_TAUEB_-2; ECRH_vint(PEXB); Wpl_WTOTB;

<Sn>_VINT(SNTOTB); QEB_QEB; Vol_VOLUMB;

Agradecimientos

Una parte de este trabajo ha sido posible gracias a la ayuda del Dr. G. V. Perezev durante su estancia (6 al 20 de febrero de 2005) en el Laboratorio Nacional

de Fusión. Esta visita ha sido financiada mediante el fondo de movilidad de EURATOM.

Referencias

1. C. Alejaldre *et al.*, *TJ-II Project: A flexible Helic Stellarator*, Fusion Technol. **17**, 131 (1990).
2. G. V. Pereverzev *et al.*, *ASTRA: an Automatic System for Transport Analysis*, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Rep. IPP 5142, Garching 1991.
3. D. López-Bruna, F. Castejón, J. M. Fontdecaba, *Transporte con ASTRA en TJ-II*, Informe Técnico Ciemat n° 1035, enero 2004.
4. I. García-Cortés *et al.*, *Spontaneous improvement of TJ-II plasmas confinement*, Plasma Phys. Control. Fusion **44**, 1639-1649 (2002).
5. P. I. Strand, W. A. Houlberg, *Magnetic flux evolution in highly shaped plasmas*, Phys. Plasmas **8** (6), 2782 (2001).
6. G. V. Pereverzev, P. N. Yushmanov, *ASTRA Automated System for TRansport Analysis*, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Rep. IPP 5/98, Garching, February 2002.
7. J. Guasp, M. Liniers, *Búsqueda de efectos quasi-isodinámicos en el TJ-II*, Informe Técnico Ciemat n° 946, diciembre 2000.
8. F. L. Hinton, R. D. Hazeltine, *Theory of plasma transport in toroidal confinement devices*, Rev. Mod. Phys. **48** (2), 239 (1976).
9. S. P. Hirschman, D. J. Sigmar, *Neoclassical transport of impurities in tokamak plasmas*, Nucl. Fusion **21**, 1079 (1981).
10. W. D. D'haeseleer, W. N. G. Hitchon, J. D. Callen, J. L. Shohet, *Flux coordinates and magnetic field structure*, Springer-Verlag, 1991.
11. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications*, Vol. I (Berlin: Springer) 1984.

Geometría del TJ-II en Astra 6.0

López-Bruna, D.; Romero, J.A.; Castejón, F.
25 pp, 8 figs. 11 refs.

Resumen:

Una de las facetas más explotadas del heliac TJ-II instalado en el Laboratorio Nacional de Fusión (CIEMAT, Madrid) es su capacidad para explorar plasmas en distintas configuraciones magnéticas. Se dispone, por ello, de librerías que proveen la métrica y otras cantidades asociadas para muchas de las configuraciones de vacío posibles. Por otro lado, los cálculos de transporte suelen realizarse mediante códigos que difícilmente se amoldan a estas geometrías, algo especialmente delicado cuando se inducen corrientes en el plasma. En este trabajo adoptamos el sistema de análisis ASTRA y estudiamos las aproximaciones que suponen el realizar cálculos, como es obligado con ASTRA, imponiendo axisimetría en configuraciones magnéticas que realmente no la tienen. Tras describir cómo se obtienen los promedios métricos del TJ-II que ASTRA necesita, hacemos dos comparaciones: (i) obtenemos la transformada rotacional de vacío según los coeficientes métricos imponiendo axisimetría y la comparamos con la calculada en las librerías existentes; y (ii) construimos un código de transporte radial con la métrica del TJ-II para comparar sus resultados con ASTRA. En ambos casos, las diferencias indican que la evaluación mediante el sistema ASTRA tanto de la evolución de la transformada rotacional con inducción óhmica como del transporte es aceptable mientras no evolucione la propia geometría.

Geometry of the TJ-II in Astra 6.0

López-Bruna, D.; Romero, J.A.; Castejón, F.
25 pp, 8 figs. 11 refs.

Abstract:

One of the most exploited features of the TJ-II Helic, a facility in the «Laboratorio Nacional de Fusión» (CIEMAT, Madrid), is its ability to explore plasmas in different magnetic configurations. For this reason, there are available libraries that provide the metrics and associated magnitudes for many among all possible configurations. On the other hand, the transport codes that can normally be used to perform transport calculations cannot deal properly with these geometries, which is especially delicate when there are induced plasma currents. In the present work we adopt ASTRA, a transport analysis shell, to study the approximations performed when calculations that impose axisymmetry (as ASTRA does) are performed on magnetic configurations that are not really axisymmetric. After describing how we obtain those TJ-II metric averages that must be set in ASTRA, we perform two comparisons: (i) we obtain the vacuum rotational transform as deduced from the metric coefficients but imposing axisymmetry, and compare the results with the rotational transform yielded by the existing libraries; and (ii) we build a 2D transport code with TJ-II metrics so its results can be compared with those of ASTRA. In both cases, the differences found indicate that evaluating the evolution of the rotational transform under ohmic induction and transport evolution is acceptable assuming that the geometry itself does not evolve.

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES

S70

PLASMA DIAGNOSTICS; MAGNETIC CONFINEMENT; TOKAMAK DEVICES; HELIAC
STELLARATORS; MAGNETIC FIELD CONFIGURATIONS; ROTATIONAL TRANSFORM;
ELECTRIC CURRENTS; PLASMA SIMULATION