М. К. Арабов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ НЕГЛАДКИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Институт математики им. А.Джураева АН РТ

Динамические системы [4], как правило, зависят от одного или нескольких параметров. Изменение этих параметров может приводить к качественным перестройкам функционирования системы — различным бифуркациям. Одними из основных при исследовании бифуркаций являются вопросы о достаточных признаках бифуркаций и приближенном построении возникающих решений системы.

На сегодняшний день теория бифуркаций [2]-[3] находит приложения в разных науках, начиная от физики и химии, заканчивая биологией и социологией.

1. Постановка задачи

Настоящая работа посвящена исследованию дифференциального уравнения [1]

$$x' = A(\mu)x + b(x,\mu) + \varphi(x,\mu)\,, \quad x \in R^N \,,(1)$$

правая часть которого зависит от скалярного параметра μ. Здесь:

– $A(\mu)$ – квадратная матрица порядка N с непрерывно дифференцируемыми элементами;

– $b(x,\mu)$ – кусочно-линейная вектор-функция, определяемая равенством

$$b(x,\mu) = \begin{bmatrix} b_{11}(\mu)|x_1|+\ldots+b_{1N}(\mu)|x_N| \\ \cdots \\ b_{N1}(\mu)|x_1|+\ldots+b_{NN}(\mu)|x_N| \end{bmatrix},$$

в котором $b_{ij}(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции;

– $\varphi(x,\mu)$ – непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных вектор-функция, удовлетворяющая условию $\varphi(x,\mu) = o(\| x \|)$ при $\| x \| \to 0$

равномерно по μ.

Уравнение (1) при всех значениях параметра μ имеет нулевое решение $x = 0$. Изучается задача о локальных бифуркациях в окрестности точки равновесия $x = 0$ уравнения (1).

Предполагается, что матрица $A(\mu_0)$ имеет либо простое собственное значение 0, либо пару простых собственных значений вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных значений. В этом случае у системы

$$x' = A(\mu)x + \varphi(x,\mu)\,, \quad x \in R^N\,,$$

с гладкой правой частью точка равновесия $x = 0$ является негиперболической, а значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации. При этом основными сценариями бифуркации являются либо транскритическая бифуркация или бифуркация типа вилки (если матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение 0), либо бифуркация Андронова-Хопфа (если матрица $A(\mu_0)$ имеет собственные значения $\pm\omega_0 i$). Интерес представляет исследование влияния на указанные сценарии бифуркаций наличие в правой части системы (1) кусочно-линейного слагаемого $b(x,\mu)$.

На первом этапе рассмотрим случаи $N = 2$.

2. Случай $N = 2$

Рассмотрим теперь случай $N = 2$, т.е. систему

$$x' = A(\mu)x + b(x,\mu) + \varphi(x,\mu)\,, \quad x \in R^2\,, \ (2)$$

Пусть матрица $A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$. Тогда решение $x = 0$ является негиперболической точкой равновесия системы

$$x' = A(\mu)x + \varphi(x,\mu)\,, \quad x \in R^2\,,$$

при этом значение μ_0 параметра μ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа этой системы.

Наличие в (2) нелинейности

$$b(x,\mu) = \begin{bmatrix} b_{11}(\mu)|x_1| + b_{12}(\mu)|x_2| \\ b_{21}(\mu)|x_1| + b_{22}(\mu)|x_2| \end{bmatrix},$$

в котором $b_{ij}(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции, может повлиять на бифурка-ционное поведение системы. Нас интересует случай, когда выполнены равенства $b_{ij}(\mu_0) = 0$.

Обозначим через $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + \omega(\mu)$ непрерывную ветвь собственных значений матрицы $A(\mu)$ такую, что $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\omega(\mu_0) = \omega_0$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha'(\mu_0) \neq 0$. Пусть $b_{ij}(\mu_0) = 0$. Тогда значение μ_0 параметра μ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (2).*

Для доказательства этой теоремы используются топологические методы, в частности, методы теории вращения векторных полей и метод функционализации параметра [5], [6].