

SPhT Saclay, Février-Mars 1998

Cosmologie, la formation des grandes structures de l'Univers

par

Francis BernardeauService de Physique Théorique, C.E. de Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

1 Introduction

La découverte en 1965 par Penzias et Wilson du fond de rayonnement cosmologique diffus à 3 K a définitivement fait du modèle du Big Bang chaud le cadre général de la cosmologie moderne. Ces trois dernières décennies ont été marquées par de nombreux progrès tant théoriques qu'observationnels qui n'ont fait que confirmer sa validité, et de préciser petit à petit les détails de ce scénario.

Parmi les avancées notables de ces dernières années, citons pour mémoire:

- La réalisation de grands catalogues de galaxies. On a maintenant des catalogues tri-dimensionnels qui contiennent des milliers d'objets. Ces catalogues permettent de faire une véritable cosmographie de l'univers local. De nouveaux moyens sont apparus récemment pour compléter ce type de catalogues, la détermination des champs de vitesse cosmiques, permet ainsi d'accéder à des informations cinématiques très précieuses. Et depuis la fin des années 80, un nouveau moyen d'investigation est en train d'émerger, il s'agit des cartes de distorsion gravitationnelle. Elles permettent de visualiser les lignes de potentiel de la masse projetée.
- le modèle de Matière Noire Froide (CDM pour Cold Dark Matter) qui est apparu au début des années 80 et qui a servi de point de référence (à défaut de devenir un modèle standard) pour tous les travaux sur le problème de la formation des grandes structures.
- Le développement des théories inflationnaires. C'est encore un terrain très spéculatif, mais c'est le lieu très excitant où les concepts de la physique des hautes énergies rencontrent des exigences observationnelles de plus en plus fiables.

- Enfin, la détection en 1992 des fluctuations de température du fond de rayonnement cosmologique par l'expérience satellitaire COBE/DMR (Smoot et al. 1992) a marqué un tournant pour la cosmologie: pour la première fois on avait une preuve directe de l'origine des grandes structures de l'univers.

Dans ce cours je vais principalement m'intéresser au problème de la formation des grandes structures.

Quelques ouvrages de référence,

- Relativité Générale: Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, 1972; Landau et Lifschitz, *Classical Theory of Fields*, 1975
- Univers primordial: Kolb et Turner *The Early Universe*, 1990, mais il est peu précis; revue de Brandenberger, *Inflation and Cosmic Strings: two Mechanisms for producing Structure in the Universe*, Int. J. Mod. Phys. A2 : 77, 1987.
- Inflation: Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, 1990; Liddle et Lyth, *The Cold Dark Matter density perturbation*, 1993, Physics Reports, 231, 1; Lidsey et al. *Reconstructing the inflaton potential - an overview*, 1997, Reviews of Modern Physics, 69, 2
- Formation des grandes structures: Peebles *The Large Scale Structure of the Universe*, 1980; *Principle of Physical Cosmology*, 1993; V. Sahni & P. Coles, *Approximation Methods for Non-linear Gravitational Clustering*, 1995, Physics Reports, 262, 1

2 Éléments de cosmologie, l'univers homogène

2.1 Les principes cosmologiques et cosmographie

Le principe fondamental sur lequel repose la cosmologie, est l'hypothèse que l'univers est, au moins à grande échelle, homogène et isotrope. Cette idée est née au début de ce siècle. Elle est en fait, à l'origine, davantage motivée par des considérations philosophiques que des raisons physiques observationnelles. Einstein a été un des premiers, dès la naissance de la Relativité Générale, à tenter de construire une métrique susceptible de décrire l'ensemble de l'univers. L'idée générale de départ était que l'univers était non seulement homogène, isotrope mais aussi immuable. L'abandon de cette dernière hypothèse est d'abord due à la mise en évidence en 1929, par un travail acharné de E. Hubble, du mouvement de récession des galaxies. Cela dit, il faudra quand même attendre 1965, avec la découverte du rayonnement fossile à 3K par Penzias & Wilson pour que l'idée que l'univers ait traversé une phase chaude, donc le modèle du Hot Big Bang, s'impose face aux tenants d'un Univers immuable qui défendaient le modèle 'steady state' (modèle stationnaire).

On a aujourd'hui des évidences assez solides en faveur de l'homogénéité et de l'isotropie. Pendant longtemps les relevés locaux d'étoiles ou de galaxies ont montré de fortes hétérogénéités. Les plus grands catalogues de galaxies arrivent enfin à mettre en évidence une homogénéité à grande échelle. Le *Las-Campanas Redshift Survey* qui contient plusieurs milliers d'objets l'illustre assez bien.

L'évidence la plus forte reste sans doute l'isotropie du fond de rayonnement à 3K. Les écarts à l'isotropie ont maintenant été détectés. Le mouvement propre de notre galaxie induit un écart de l'ordre de 10^{-3} , mais les anisotropies propres sur cette surface de dernière diffusion ne sont que de l'ordre de 10^{-5} .

Tout cela contribue à valider le modèle d'un Univers homogène et isotrope à grande échelle.

Dans le cadre de la Relativité Générale le principe cosmologique détermine une forme générale de la métrique. On peut se référer pour ce calcul au livre de Weinberg (1972). La forme générale de la métrique qui répond à ces conditions est donnée par la métrique dite de Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\theta^2 + x^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1)$$

où k est une constante. Si k est nul la partie spatiale de la métrique est plate. Sinon on a une courbure non nulle.

On voit que cette métrique est indépendante de la position et qu'il n'y a aucune direction privilégiée. Mais cela ne préjuge pas a priori de la topologie *globale* de l'univers. Même quand k est nul ou négatif, on peut très bien avoir un Univers de taille finie en imaginant une topologie périodique (voir une revue récente de Lachièze-Rey et Luminet, gr-qc/9605010, Phys. Rept. 254 (1995) 135). Notons que cela brise tout de même l'isotropie globale de l'Univers. De telles conditions périodiques n'ont pas de conséquences sur la dynamique, sur la résolution des équations d'Einstein, qui sont purement locales (c'est vrai aussi bien pour le facteur d'expansion, que pour la formation des structures, au moins tant que ces structures sont plus petites que la maille élémentaire). Par contre cette hypothèse a des conséquences observationnelles dès que l'on s'intéresse aux propriétés statistiques des champs cosmiques: la même portion se retrouve dans des directions différentes induisant de ce fait des propriétés statistiques spécifiques. Dans la suite de cet exposé je vais négliger une telle possibilité.

Une conséquence du facteur d'expansion a , c'est la loi de Hubble. En effet la vitesse relative de deux particules à la distance physique, $\mathbf{r} \equiv a \mathbf{x}$, est donnée par

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(a \mathbf{x}) = \dot{a} \mathbf{r} + a \dot{\mathbf{x}}. \quad (2)$$

Cette relation montre que la vitesse moyenne des objets les uns par rapport aux autres est proportionnelle à la distance de ces objets. On appelle H cette

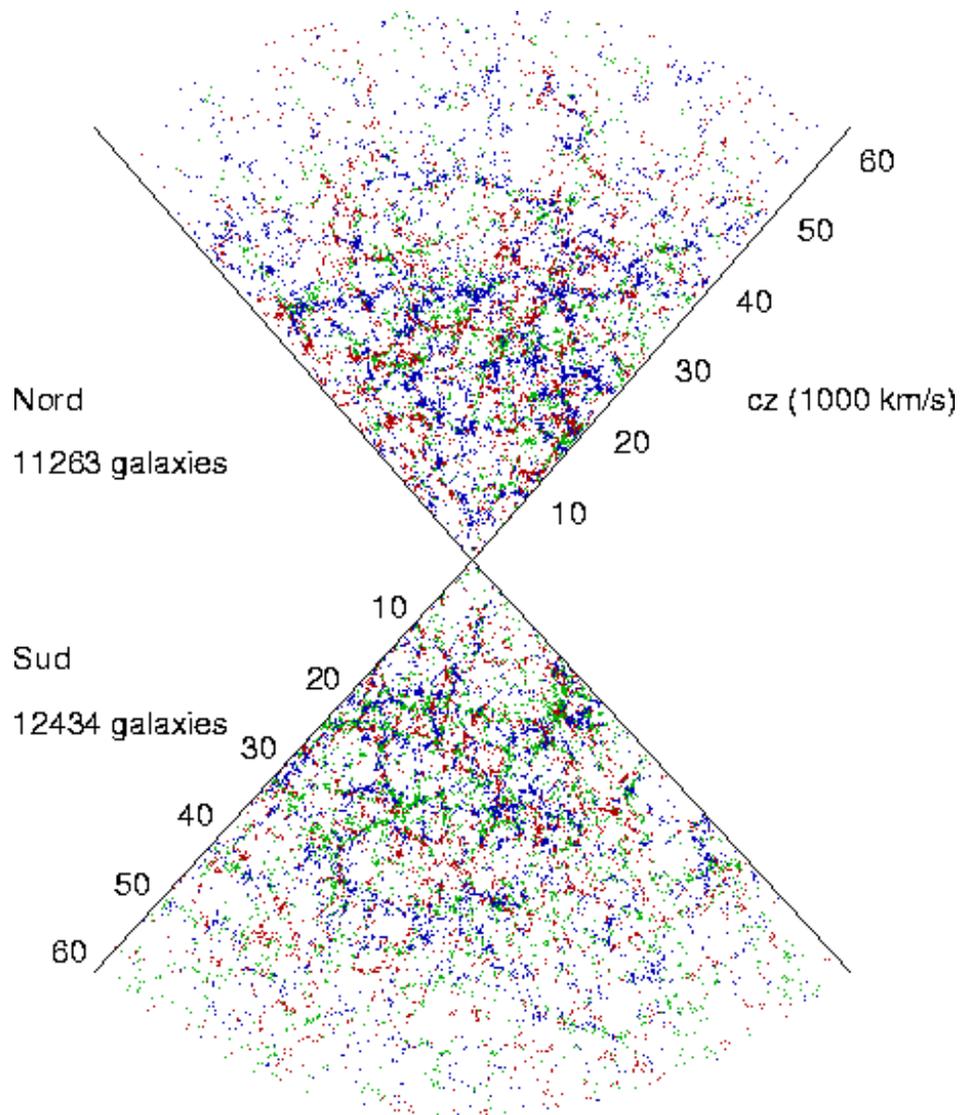


Figure 1: Le *Las-Campanas Redshift Survey*, Shectman et al. 1996

quantité, dite 'constante de Hubble'¹,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3)$$

Il y a un terme supplémentaire qui est la vitesse particulière des particules. Cette vitesse est en moyenne nulle. Pour une galaxie elle est de l'ordre de 300 *km/s*.

Cette relation là est purement locale, si on veut faire des calculs plus précis il faut tenir compte de la courbure spatio-temporelle. Imaginons qu'on détecte un signal lumineux (d'une galaxie lointaine) à un instant t_0 . Il a été émis à l'instant t_1 et à la distance x_1 . Pour relier t_1 à x_1 il faut intégrer le long de la géodésique suivie par les photons. Dans ce cas c'est très simple,

$$ds^2 = 0 = dt^2 - a^2(t) \frac{dx^2}{1 - kx^2}. \quad (4)$$

On a donc,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}}. \quad (5)$$

Si la galaxie émettrice est au repos, x_1 indépendant du temps, alors deux événements séparés par un intervalle de temps δt_1 au moment de l'émission sont séparés d'un intervalle de temps δt_0 à la réception avec,

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}, \quad (6)$$

ce qui implique que les longueurs d'onde électromagnétiques λ_1 et λ_0 sont reliées par,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (7)$$

Or dans un spectre d'objets lointains comme les galaxies, des raies spécifiques, d'absorption par exemple, se retrouvent assez facilement. L'expansion (donc éloignement relatif des objets) se traduit par un décalage vers le rouge de ces raies, (que je vais dans toute la suite appelé redshift). En mesurant le rapport d'une longueur d'onde mesurée avec la longueur d'onde correspondante au repos, on mesure donc directement un rapport de facteurs d'expansion entre l'émission et la réception,

$$1 + z(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (8)$$

Notons que si on interprétait ce décalage spectral comme une vitesse d'éloignement, cette vitesse serait de $cz/(1+z)$.

Le redshift est finalement la mesure de distance par excellence en cosmologie. Si on a tendance à utiliser les Mega-parsecs (un parsec vaut approximativement

¹ce terme est bien mal approprié puisque cette quantité dépend en fait du temps

3.5 année-lumière), on réintroduit finalement la constante de Hubble dedans et c'est bien de vitesses relatives que l'on parle. Pour cela on introduit la variable réduite,

$$h = \frac{H}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}. \quad (9)$$

Ainsi la distance typique des galaxies entre elles est de l'ordre de $5h^{-1}\text{Mpc}$, c'est à dire de 500 km/s . La difficulté qu'on a à mesurer la constante de Hubble vient du fait qu'il faut trouver un moyen de calibrer une relation. Il faudrait une "règle", et on en a pas de très bonne à notre disposition.

La relation de proportionnalité entre la vitesse et la distance n'est vraie que dans l'Univers local. Dès que le redshift approche l'unité il faut préciser de quelle distance on parle.

- La distance angulaire. Un objet de taille propre D donnée sera vu sous un angle δ . Si cet angle est petit, alors on peut définir la distance d_A par

$$\delta \equiv \frac{D}{d_A}. \quad (10)$$

Si on écrit $ds^2 = 0$ pour la distance transversale d'un objet, donc à x_1 fixe, on a $dt = a(t_1) x_1(t_1) \delta$ d'après la forme de la métrique. On a donc simplement

$$d_A(t_1) = a(t_1) x_1(t_1). \quad (11)$$

- La distance lumineuse. Cela correspond au fait que physiquement la luminosité apparente d'une source décroît avec la distance. Plus précisément si $L_{\text{abs.}}$ est la luminosité absolue d'un objet et $L_{\text{app.}}$ sa luminosité apparente, alors on peut définir d_L par,

$$L_{\text{abs.}} = L_{\text{app.}} 4 \pi d_L^2, \quad (12)$$

et on trouve

$$d_L(t_1) = \frac{a^2(t_0)}{a^2(t_1)} d_A(t_1). \quad (13)$$

La meilleure manière d'obtenir cette relation est d'écrire la conservation de l'énergie des photons émis.

- La distance du mouvement propre. Si l'angle, $\Delta\delta$, parcouru par un objet de vitesse perpendiculaire V_{\perp} pendant le temps (de l'observateur) Δt_0 , on définit la distance d_M par,

$$\Delta\delta = \frac{V_{\perp} \Delta t_0}{d_M}. \quad (14)$$

On a

$$d_M(t_1) = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} d_A(t_1). \quad (15)$$

- La distance parallaxe. Cela correspond à la mesure d'une distance par effet de parallaxe (changement de la position de l'observateur). C'est un peu le contraire du cas de la distance angulaire. On trouve

$$d_P(t_1) = a(t_0) \frac{x_1}{\sqrt{1 - k x_1^2}}. \quad (16)$$

Ce serait intéressant, mais cette méthode ne permet absolument pas d'accéder à des distance cosmologiques!

Un paramètre qu'il peut être utile de considérer est le paramètre de décélération q_0 ,

$$q_0 = -\frac{\ddot{a} a}{\dot{a}^2}(t_0). \quad (17)$$

On peut alors faire le développement perturbatif à $t = t_0$,

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right] \quad (18)$$

qui donne une relation perturbative entre la distance x_1 et le redshift z ,

$$x_1 = \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right]. \quad (19)$$

La comparaison distance-redshift permet donc en premier lieu de mesurer le paramètre de décélération q_0 . Ce qu'on vient de faire n'est que de la cosmographie à partir de la métrique de R.W.. Pour faire mieux il faut écrire les équations dynamiques.

2.2 Évolution du facteur d'expansion

Les équations d'Einstein s'écrivent,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\rho{}_\rho = -8\pi G T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}. \quad (20)$$

Je garde ici la possibilité d'avoir une constante cosmologique non nulle. Une telle métrique impose que le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmique est isotrope (pas de pression anisotrope). Autrement dit, $T_{\mu\nu}$ peut s'écrire

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}. \quad (21)$$

A partir de la conservation de l'énergie impulsion on peut écrire (composante (0,0)),

$$a^3 \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3 (\rho + p)] \quad (22)$$

qui peut se réécrire,

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -3 p a^3. \quad (23)$$

Pour simplifier les discussions à venir je vais supposer qu'il existe une équation d'état de la forme,

$$p = w \rho, \quad (24)$$

qui relie la pression locale à la densité. w est supposé constant. Évidemment cette hypothèse, vraie pour chacun des fluides pris séparément, n'est pas vraie en général pour le fluide total mais c'est vrai une grande partie du temps (sauf pendant les périodes de transition). Quand la densité d'énergie du rayonnement (ou des particules ultra-relativistes) domine sur celle des particules non-relativistes, on a alors $w = 1/3$. Si c'est la matière qui domine alors on a $w = 0$ (poussières sans pression).

Notons quand même que la conservation d'énergie s'applique pour chaque fluide cosmique séparément (si ils ne sont effectivement couplés que par gravitation). Cela donne l'évolution de la densité de chacun des fluides en fonction du facteur d'expansion.

$$\rho_\gamma \propto a^{-4} \text{ pour le rayonnement} \quad (25)$$

$$\rho_{\text{mat.}} \propto a^{-3} \text{ pour la matière.} \quad (26)$$

Les équations d'Einstein donnent alors les équations d'évolution du facteur d'expansion a .

$$3 \ddot{a} = -4\pi G \rho (1 + 3w) a + \lambda a; \quad (27)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{a} \left[\frac{8\pi G}{3} \rho a^3 - k a + \frac{\lambda a^3}{3} \right]. \quad (28)$$

Si on interprète λ comme un fluide cosmique, on a une densité associée de $\rho_\lambda = -p_\lambda = \lambda/(8\pi G)$. Noter que, compte tenues des équations de conservation, l'équation (28) est l'intégrale de la première et k joue là le rôle d'une constante d'intégration. Cela permet de donner une interprétation plus dynamique à k . Plus précisément, la première équation correspond à l'application du théorème de Gauss (ou plutôt de Birkhoff dans le cadre de la relativité générale) à une sphère de densité $\rho + \lambda$, alors, si $\lambda = 0$, cette sphère peut croître jusqu'à atteindre un rayon infini uniquement si $k \leq 0$. Si $k > 0$, il y a un rayon d'extension maximale.

Pour avoir la dépendance en temps du facteur d'expansion il faut finalement résoudre les équations complètes.

Si $k = 0$ et $\lambda = 0$, on trouve

$$a(t) \propto t^{2/3}, \text{ puisque } \dot{a}^2 \sim \frac{1}{a} \quad (29)$$

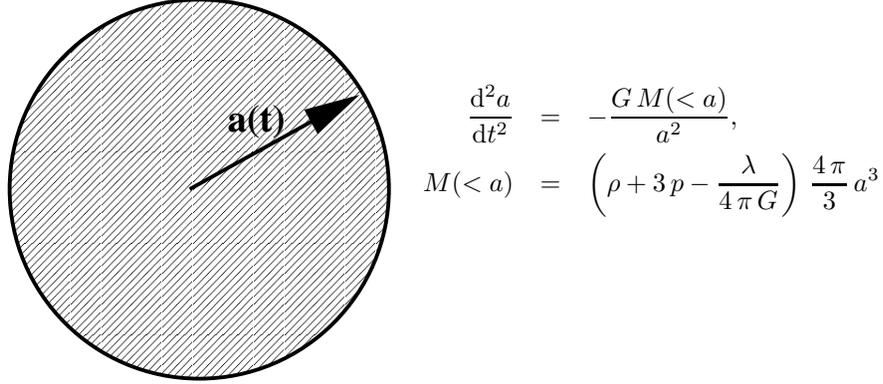


Figure 2: Application du théorème de Birkhoff au facteur d'expansion

pour un Univers dominé par la matière et

$$a(t) \propto t^{1/2}, \text{ puisque } \dot{a}^2 \sim \frac{1}{a^2} \quad (30)$$

pour un Univers dominé par le rayonnement. Pour un Univers dominé par la matière quand $\lambda = 0$ on a une solution explicite pour la croissance du facteur d'expansion. Si $k = +1$ ($\Omega_0 > 1$) on a²

$$a(t) = \frac{a_0 \Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} [1 - \cos(\theta)]; \quad (31)$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [\theta - \sin(\theta)]; \quad (32)$$

et si $k = -1$ on passe à des fonctions hypergéométriques en faisant $\theta \rightarrow i\psi$.

Je reviens tout de suite sur l'équation d'évolution de a , Eq. (28), et des différents termes qui la composent. Si on suppose a priori que a croît avec le temps, on voit que les termes en ρ , k puis λ dominant successivement le terme de droite.

Pour simplifier la discussion on introduit deux quantités réduites,

$$\Omega = \rho/\rho_c \text{ avec } \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (33)$$

et

$$\Lambda = \frac{\lambda}{3H^2}. \quad (34)$$

On a alors

$$\Omega + \Lambda = 1 + \frac{k}{\dot{a}^2}. \quad (35)$$

²Dans toute la suite les indices 0 font référence à des quantités prises au temps présent

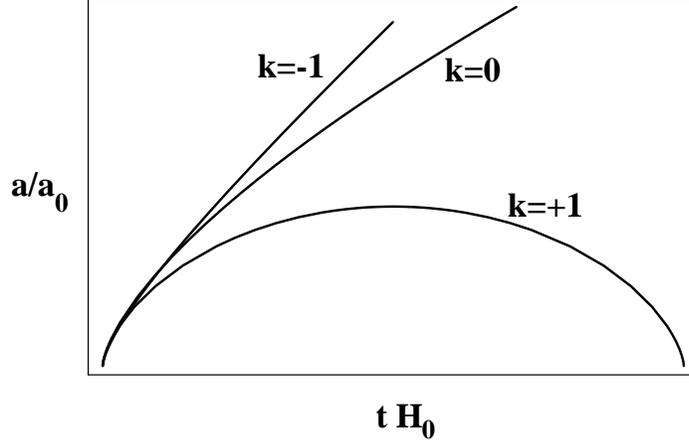


Figure 3: Évolution du facteur d'expansion dans les cas $k = -1$, $k = 0$ ou $k = +1$.

Si $k = 0$ la somme des 2 doit faire 1 par construction. Remarquons aussi que ces deux quantités sont en générale dépendantes du temps, $\Omega = 1$ et $\lambda = 0$ étant le seul point statique (intéressant). On peut remarquer que le paramètre de décélération q_0 s'identifie à,

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Lambda_0. \quad (36)$$

Dans le plan (Ω, Λ) on a, certes, de plus en plus d'indications sur le point qu'occuperait actuellement l'Univers mais il faut bien avouer qu'aucune mesure de Ω ou Λ n'est vraiment probante et indiscutable. On sait quand même que Ω doit être compris entre 0.2 et 1. Pour Λ , c'est encore moins précis, disons qu'il est de l'ordre de quelques unités. Si Λ est trop grand la distance lumineuse n'est plus monotone, et finalement on a plus de Big-Bang. Si Λ est trop petit (négatif) l'Univers est très jeune.

Dans ce plan, il y a deux segments qui sont plus particulièrement envisagés et qui correspondent à des a priori théoriques différents,

- Le cas $\lambda = 0$;
- Le cas $\Omega + \lambda = 1$ donc $k = 0$;

Sur la figure (4), j'ai représenté les deux directions d'instabilité, et la dépendance de Ω et Λ avec le temps dans ces deux directions.

Avec une solution explicite pour le comportement du facteur d'expansion, on peut expliciter la dépendance des distances avec le redshift,

$$x_1(z) = \frac{z q_0 + (q_0 - 1)(-1 + \sqrt{2 q_0 z + 1})}{H_0 a_0 q_0^2 (1 + z)}. \quad (37)$$

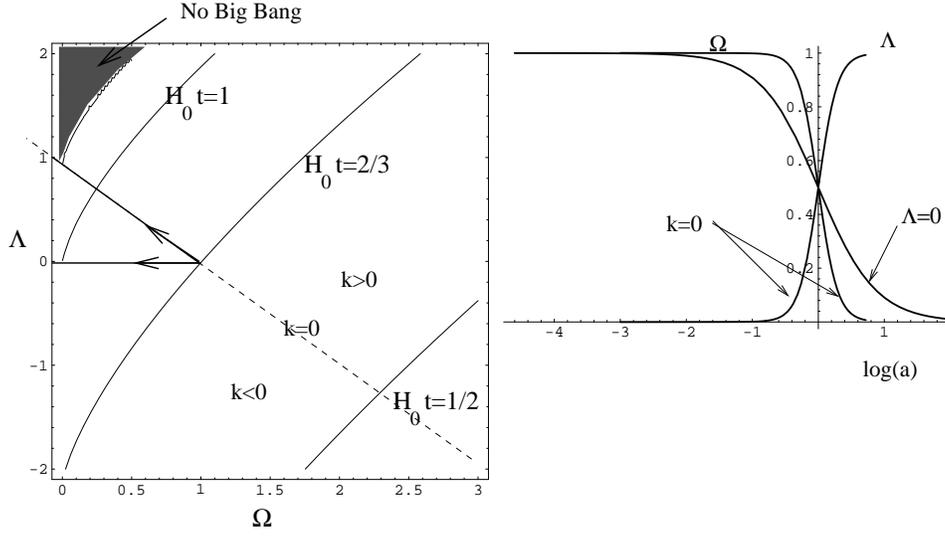


Figure 4: Le plan Ω - Λ et évolution des paramètres cosmologiques réduit Ω et Λ dans les cas particulier où $\lambda = 0$ ou $k = 0$.

Cette expression est valable pour $\lambda = 0$. Évidemment on retrouve le développement précédent qui est valable pratiquement jusqu'à $z = 1$. Pour $\Omega_0 = 1$, on a $q_0 = 1/2$, on a,

$$x_1 = \frac{2}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \quad (38)$$

Un concept intéressant à considérer est l'horizon d'une particule. Si on a un observateur à un temps t_0 , on peut se demander qu'elle elle la distance maximale peut se trouver un événement observable, donc l'"horizon de la particule". Cet horizon, x_H , est naturellement défini par,

$$\int_0^{x_H} \frac{dx}{\sqrt{1-kx^2}} = \int_{t \rightarrow 0}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (39)$$

Cette intégrale converge si le facteur d'expansion ne croît pas trop vite à l'origine. On a,

$$x_H = 3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/3} \quad (40)$$

Avec $H_0 t_0 = 2/3$ on a,

$$x_H = \frac{2}{H_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2}. \quad (41)$$

La taille de notre propre horizon est donc de l'ordre de $6000 h^{-1}\text{Mpc}$. Une quantité auquel on peut s'intéresser c'est la taille apparente de l'horizon d'une particule sur la surface de dernière diffusion. Cette angle est donnée par,

$$\delta_H = \frac{x_H}{d_A(x_H)} = \left(\frac{a_*}{a_0}\right)^{1/2} \approx 0.03 = 2 \text{ deg}. \quad (42)$$

La taille de l'horizon sur le ciel est donc de l'ordre de 2 deg: si le facteur d'expansion a évolué de manière standard depuis l'origine du Big-Bang, des régions du ciel séparées de plus de cette distance n'ont donc jamais été en contact causal.

2.3 Contraintes actuelles sur les paramètres cosmologiques

Dans ce paragraphe je vais essayer de faire le point sur la détermination des paramètres cosmologiques.

- La constante de Hubble. La mesure de la constante de Hubble est une entreprise très difficile. La maîtrise des biais systématiques est en particulier très ardue. Le satellite Hipparcos a apporté quelque lumière à la première étape de l'échelle cosmique, en mesurant la distance par parallaxe de céphéides de notre voisinage. Le Hubble Space telescope s'est évertué à rechercher des céphéides dans des galaxies lointaines (Virgo). Les valeurs les plus souvent admises sont de l'ordre de 60 à 70 km/s/Mpc. Globalement les résultats récents indiquent quand même une réduction du problème de l'âge de l'Univers.
- Le paramètre de densité, Ω . Les estimations dynamiques donnent des valeurs de l'ordre de 0.2 (pour les amas) à l'unité (flots cosmiques à grande échelle, voir Dekel 1994). Je reviendrai sur ces méthodes qui sont basées sur des études de structures.
- La constante cosmologique. En plus des contraintes mentionnées plus haut, on s'attend à ce que Λ ne dépasse pas l'unité, sinon le volume de l'Univers serait tel qu'on aurait énormément d'objets lointains (quasars) qui subiraient des effets de lentille.
- le paramètre de décélération q_0 . La relation distance-redshift, à grand redshift, est sensible au premier ordre au paramètre de décélération q_0 . L'idée est de se servir de Super-Novae, qui sont à des redshift connus, et de déterminer leur distance en s'appuyant sur leur courbe de lumière (voir figure). Pour l'instant les contraintes ne sont pas forcément très solides. Pour donner un aperçu des dernières tendances, globalement il semble qu'un modèle où

$$\Omega_0 = 0.3 \quad (43)$$

$$\Lambda_0 = 0.7 \quad (44)$$

avec une courbure nulle n'est pas une hypothèse ridicule et commence à être prise sérieusement en compte.

2.4 Histoire thermique de l'Univers

Je poursuis mes rappels sur le modèle du big-bang chaud en faisant un bref descriptif de l'histoire thermique de l'univers. Dans les modèles qui nous intéressent le facteur d'expansion est évidemment une fonction croissante du temps, ce qui implique que la densité et éventuellement la pression croissent quand on remonte dans le passé.

On peut identifier un certain nombre d'étapes clefs. On peut comparer la densité de rayonnement à la densité de matière (ou du moins ce que l'on en sait).

Pour le rayonnement, c'est la densité du corps noir cosmologique, dont la densité d'énergie est donnée par la loi de Stephan,

$$\rho_\gamma = a T^4, \quad (45)$$

où a est la constante de Stephan. Notez que c'est là une quantité très bien connue! (voir figure montrant l'émission du corps noir). La densité de matière, c'est par définition

$$\rho_{\text{mat.}} = \Omega_0 \rho_c. \quad (46)$$

Celle-ci est nettement moins bien connue, à cause de Ω et de H_0 . Il n'empêche, on est aujourd'hui largement dominé par la matière, mais quand on remonte dans le passé il y a un moment où $\rho_\gamma = \rho_{\text{mat.}}$. Cette équivalence a lieu quand

$$a = a_{\text{eq.}} \quad (47)$$

avec

$$a_{\text{eq}} = \frac{1}{40\,000\,\Omega_0\,h^2}. \quad (48)$$

A ce moment là la température est à peu près de 100 000 K.

C'est un moment crucial pour l'évolution du facteur d'expansion, mais ce qui est aussi intéressant c'est ce qui se passe pour les baryons quand la température et la pression montent. A une température de quelques milliers de degrés la 'recombinaison' a eu lieu: au delà de cette température électrons et protons se découplent. Il reste de cette époque le fond de rayonnement à 3 K.

Je vais illustrer ce qui se passe en calculant explicitement le redshift de la recombinaison. Cela va illustrer la méthode générale mise en œuvre pour faire ce genre de calculs.

On suppose qu'on a un équilibre chimique entre les différentes espèces qui interviennent,



On écrit l'équilibre des potentiels chimiques et on obtient,

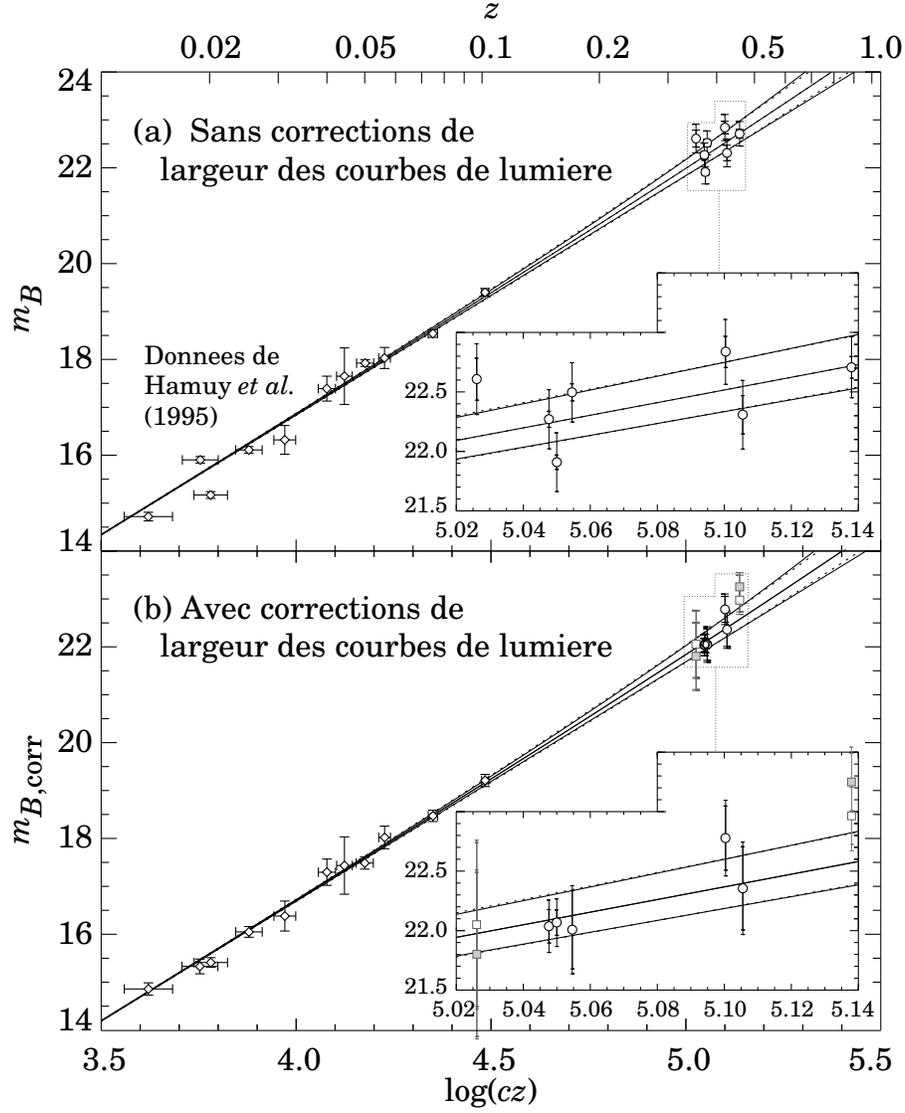


Figure 5: La relation luminosité-redshift et son application pour mesurer le paramètre de décélération q_0 . Les courbes théoriques correspondent respectivement à $q_0 = 0$ (en haut), $q_0 = 1/2$ (au milieu) et $q_0 = 1$ (en bas) obtenues en supposant soit $\Lambda = 0$ (courbes continues) soit $k = 0$ (courbes pointillées). Ces mesures sont susceptibles d'être affectées par des erreurs systématiques non prises en compte ici (extinction ...) Figure tirée de Perlmutter et al. 1996.

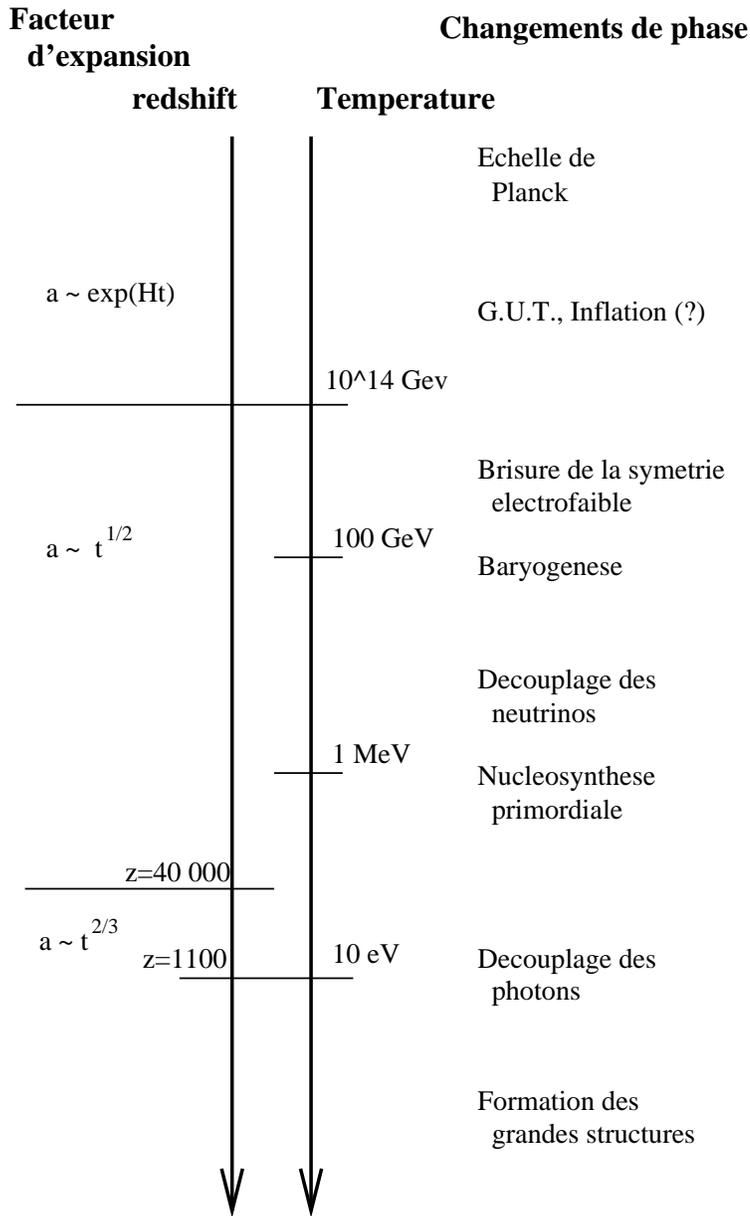


Figure 6: Histoire thermique de l'Univers. Si les dernières étapes sont relativement bien comprises, d'autres sont beaucoup plus spéculatives. Par exemple il a été envisagé que la baryogenèse ait pu avoir lieu aussi bien au moment de la brisure de symétrie électrofaible que des énergies de la GUT. Notons que la nucléosynthèse primordiale donne une contrainte sur la quantité de baryons, $\Omega_b h^2 = 0.013 \pm 0.0003$.

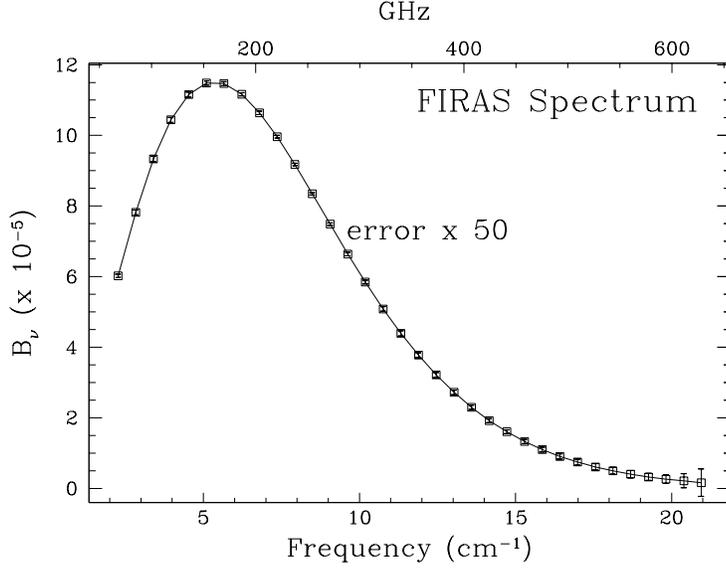


Figure 7: Le spectre de corps noir observé par l'expérience COBE/FIRAS (Mather et al. 1990).

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H + \mu_\gamma. \quad (50)$$

Pour les photons on a évidemment $\mu_\gamma = 0$. Le photon est sa propre antiparticule et de plus on sait par l'observation du spectre du CMB qu'il n'y a pas eu de dépot significatif d'énergie dans le corps noir comme ce pourrait être le cas si on avait des particules instables.

Si on appelle x une espace non-relativiste de masse m_x et de dégénérescence g_x on a,

$$n_x = g_x \left(\frac{m_x T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp[(\mu_x - m_x)/T]. \quad (51)$$

L'équilibre des potentiels chimiques implique alors que (on suppose $m_H = m_p$ dans le pré-facteur),

$$\frac{n_e n_p}{n_H n_b} = \frac{1}{n_b} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp[-(m_e + m_p - m_H)/T]. \quad (52)$$

Ce rapport s'exprime facilement en fonction de la fraction de ionisation, x_e , avec

$$\frac{n_e n_p}{n_H n_b} = \frac{x_e^2}{1 - x_e}. \quad (53)$$

La température de la recombinaison qui correspond disons à $x_e = 0.5$ a donc une dépendance logarithmique avec la densité de baryons parce que le préfacteur est très grand: $\eta = n_b/n_\gamma \approx n_b/T^3 \approx 10^{-10}$. Sachant que $m_e + m_p - m_H = 13.6 \text{ eV} = 160\,000 \text{ K}$, on trouve plus spécifiquement que

$$T \approx 3500K \text{ soit } z_* \approx 1100. \quad (54)$$

Le moment de la recombinaison est donc relativement bien contrôlé.

A des températures de l'ordre du MeV, ce sont les neutrinos qui se sont découplés: il en reste un fond de neutrinos (non-déecté!) dont il faut tenir compte quand on calcule la densité de rayonnement. A peu près au même moment (à une température légèrement inférieure, tout de même) a eu lieu la nucléosynthèse primordiale: formation des noyaux de deutérium, d'hélium 3 et 4 et de Lithium 7. Dans les conditions de densité de l'univers primordiale, il est impossible de former des noyaux plus lourds (ces réactions n'atteignent jamais l'équilibre thermodynamique, ce qui donnerait des noyaux autour du fer) parce que les noyaux de masse nucléaire 5 et 8 sont instables. La nucléosynthèse explosive saute cette étape grâce à une réaction à trois corps, la triple α qui donne directement du carbone: cette réaction est évidemment très défavorable en milieu ténu.

Ces étapes sont très bien comprises, et reposent sur de la physique de laboratoire (les sections efficaces des réactions nucléaires par exemple) mais ce qui se passe à température plus élevée est plus spéculatif. Baryogenèse, mécanismes de brisure de symétrie sont autant de sujet de recherche actifs.

Quand on remonte encore en énergie, à l'approche des énergies de GUT on a des théories très spéculatives, de plus en plus éloignées de la physique de laboratoire. Une idée s'est imposée depuis le début des années 80, c'est le mécanisme de l'inflation.

2.5 Inflation, motivations et principe de base

L'inflation permet d'expliquer pas mal de chose dans un même scénario. Son plus grand mérite est sans doute de mettre dans le champ de la physique une problématique générale, les conditions initiales, qui semblait jusqu'à lors en dehors de son champ d'investigation. Du même coup l'Univers observable n'est plus qu'une infime petite partie de l'Univers au sens plus philosophique du mot.

- Le problème de la platitude; Aujourd'hui la densité est sinon critique, du moins très proche de la densité critique. Cela implique que dans le passé la densité était infiniment proche de la densité critique (voir figure 3).
- Le problème de l'horizon. On observe que des régions du ciel qui, dans une cosmologie standard, n'ont jamais été en relations causales ont la même température (à 10^{-5} près).

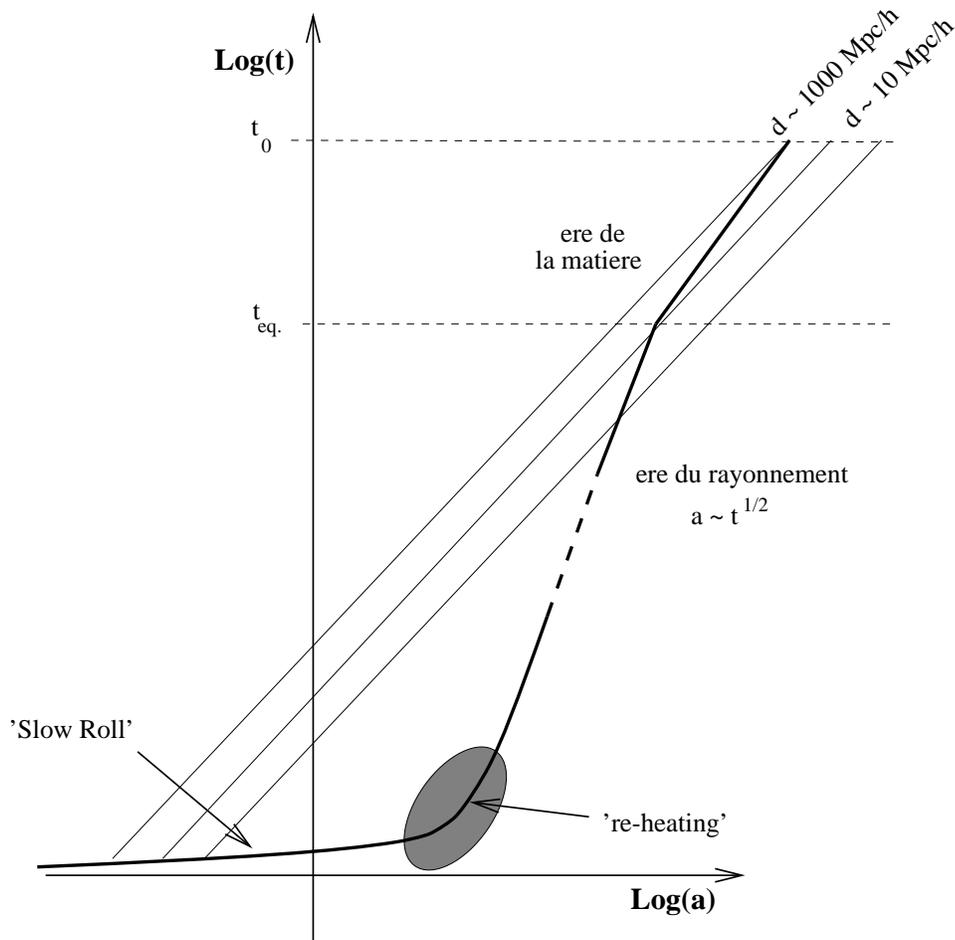


Figure 8: Représentation schématique du scénario de l'inflation

- Absence de monopoles. On s'attend naturellement à avoir un reliquat de monopoles magnétiques à cause de transitions de phases en théorie des Grande Unification. Ce serait des objets massifs qui produiraient une densité de 15 ordres de grandeur plus grande que la densité critique.
- La formation des grandes structures: mécanisme pour la génération des fluctuations.

Comment marche l'inflation? L'idée c'est qu'à un moment donné, après l'échelle de Planck, la densité d'énergie est concentrée dans un champ scalaire, l'inflaton φ , et que le potentiel de ce champ est à l'origine non nul: cela conduit à une croissance rapide du facteur d'expansion.

Dans la suite, je ne vais pas essayer de faire une présentation exhaustive de la théorie de l'inflation. Je vais m'intéresser à un cas simple correspondant à ,

- un champ simple pour l'inflaton;
- cas où l'approximation dite de 'Slow Roll' est valable.

Rappelons que l'action pour un champ quantique s'écrit,

$$S = \int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} \left(\mathcal{L} - \frac{\mathcal{R} m_{\text{pl.}}^2}{16\pi} \right) \quad (55)$$

où \mathcal{L} est la densité de Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) - V(\varphi). \quad (56)$$

Le terme supplémentaire qui apparaît dans l'action redonne les équation d'Einstein. Dans cette partie, pour reprendre l'habitude de la physique des hautes énergie, la constante de gravitation G sera notée,

$$G \equiv \frac{1}{m_{\text{pl.}}^2} \quad \text{quand } \hbar = c = 1. \quad (57)$$

Dans la suite, je vais illustrer mon propos avec le cas simple,

$$V(\varphi) \propto \frac{\lambda}{4} \varphi^4, \quad (58)$$

correspondant à l'inflation chaotique chère à Linde. Il y a deux dynamiques qui sont liées, l'une du facteur d'expansion qui dépend de la densité d'énergie, l'autre du champ φ . L'équation d'évolution pour φ s'obtient en cherchant un extremum de l'action et on trouve,

$$\ddot{\varphi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} - \frac{1}{a^2} \Delta \varphi = - \frac{dV}{d\varphi}. \quad (59)$$

L'équation d'évolution du facteur d'expansion s'obtient en écrivant les équations d'Einstein. La densité locale d'énergie est donnée par,

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + V(\varphi). \quad (60)$$

On a donc,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi a^2}{3 m_{\text{pl.}}^2} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + V(\varphi) \right] - k. \quad (61)$$

En fait d'abord considérer la valeur moyenne du champ qu'on écrit donc,

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, \mathbf{x}) \quad (62)$$

et on fait l'hypothèse que la relativité générale s'applique 'classiquement' à la valeur moyenne. Cela suppose qu'on s'intéresse à une époque postérieure à l'époque de Planck (jusqu'à preuve du contraire on ne sait pas faire de la gravité quantique). La quantification du champ se fera sur la partie fluctuante uniquement, et on suppose que la densité d'énergie portée par φ_0 est bien plus importante. Avec cette hypothèse on peut traiter la dynamique de φ_0 indépendamment de ses fluctuations.

L'équation d'évolution donne pour φ_0 ,

$$\ddot{\varphi}_0 + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi}_0 = -\frac{dV}{d\varphi}(\varphi_0), \quad (63)$$

et celle pour le facteur d'expansion donne,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi a^2}{3 m_{\text{pl.}}^2} \left[\frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} + V(\varphi_0) \right] - k. \quad (64)$$

On reconnaît pour l'équation d'évolution de φ , les termes qu'on attend dans une métrique de Minkowski plus un autre terme qui vient de la dépendance en temps du facteur d'expansion, qui agit comme un terme de frottement. Pendant l'inflation, c'est ce terme qui domine: on a un régime stationnaire où l'énergie du champ se dissipe dans une expansion rapide,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G a^2}{3} V(\varphi), \quad (65)$$

$$3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi}_0 = -\frac{dV}{d\varphi}(\varphi_0). \quad (66)$$

La solution de ces équations donnent pour le potentiel de départ,

$$\varphi_0(t) = \varphi_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_{\text{pl.}} t\right), \quad (67)$$

et,

$$a(t) \sim \exp(Ht), \quad (68)$$

avec,

$$H(t) = \sqrt{\frac{8\pi V}{3 m_{\text{pl.}}^2}}. \quad (69)$$

Cette solution en $a(t)$ implique que

$$\frac{\ddot{a}}{a} \sim \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad (70)$$

ce qui implique une équation d'état effective pour le fluide cosmique $p = -\rho$. Une conséquence est la rapide décroissance du terme de courbure dans l'équation

qui donne la constante de Hubble. En effet $\Omega_k \equiv -k/\dot{a}^2$ croît pour le big bang standard (comme $t^{1/2}$ ou $t^{1/3}$) mais décroît très rapidement (comme $\exp(-Ht)$) pendant l'inflation.

La validité de l'approximation de 'Slow Roll' implique un certain nombre de propriétés de platitude sur la forme du potentiel de l'inflaton. On peut exprimer ces conditions comme des conditions sur la forme du potentiel. En particulier on doit avoir $\dot{\varphi}_0^2 \ll V$ ce qui implique,

$$\epsilon = \frac{m_{\text{pl.}}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (71)$$

et la condition $\ddot{\varphi}_0 \ll V'$ implique,

$$|\eta| \ll 1 \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{m_{\text{pl.}}^2 V''}{8\pi V}. \quad (72)$$

Cela dit on peut quand même faire marcher l'inflation dans de tels cas. Par exemple Starobinsky a examiné un certain nombre de cas où certaines des conditions de 'Slow Roll' ne sont pas vérifiées, par exemple quand on a une non-analyticité dans la forme du potentiel.

Mais évidemment l'inflation n'est pas seulement intéressante pour résoudre un certain nombre de problèmes liés à l'Univers homogène, cela donne aussi un moyen de produire des fluctuations de la métrique à l'origine des grandes structures.

Dans ce cas là, ce sont les fluctuations de l'inflaton que l'on doit examiner. L'hypothèse physique sous-jacente est qu'il est légitime de quantifier les fluctuations de l'inflaton dans une métrique dépendante du temps. Cela implique que l'on puisse écrire,

$$\delta\varphi = \int d^3\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}}^*(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right] \quad (73)$$

où a^\dagger et a vont être les opérateurs de création et d'annihilation du champ. Ils obéissent donc à la relation de commutation suivante,

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{-\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (74)$$

L'équation du mouvement vérifiée par ce champ est,

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} + \frac{\Delta\delta\varphi}{a^2} = -V''\delta\varphi \approx 0. \quad (75)$$

Dans l'approximation du 'Slow-Roll' le terme de source est négligeable et H est constant. On a là une équation de champ libre. Cette équation donne la forme fonctionnelle de $\psi_{\mathbf{k}}$ en fonction du temps.

Pour avoir la normalisation on peut imposer qu'à petite échelle on retrouve les mêmes règles de quantification que pour un espace de Minkowski, c'est à dire que

$$\left[\varphi, \pi \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right] = i \delta^{(3)}(a \mathbf{x}_1 - a \mathbf{x}_2) = \frac{i}{a^3} \delta^{(3)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (76)$$

Pour une métrique de Minkowski les fonctions ψ_k sont simplement proportionnelles à des exponentielles et leur amplitude est donnée par

$$\psi_k(t) = \frac{1}{a^{3/2}} \left(\frac{a}{2k} \right)^{1/2} \exp[i k t/a]. \quad (77)$$

Pour un espace de Sitter il faut tenir compte de l'évolution du terme supplémentaire en H et on a,

$$\psi_k(t) = \frac{H}{(2k)^{1/2}} \left(i + \frac{k}{aH} \right) \exp \left[\frac{ik}{aH} \right]. \quad (78)$$

A petite échelle on retrouve bien sûr les solutions correspondant au cas Minkowski. Cela fixe au passage la normalisation de ces modes: c'est parce que les fluctuations sont à l'origine quantique qu'on peut en calculer l'amplitude. A la traversée de l'horizon on a un mode croissant très simple. Au bout du compte on a un mode simple de la forme,

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{k}} \approx \frac{H}{k^{3/2}} \left(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger \right), \quad \delta\varphi = \int d^3\mathbf{k} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (79)$$

Les conséquences sont nombreuses et très intéressantes:

- Toutes les observables qu'on peut construire à partir de ces champs vont commuter entre elles. On passe donc de fluctuations quantiques à des variables qui se comportent comme des grandeurs stochastiques classiques. On peut facilement vérifier que les variables aléatoires $(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger)$ induisent un champ stochastique Gaussien. Pour être plus spécifique on a

$$\langle 0 | \hat{\varphi}_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_\varphi(k) \quad (80)$$

$$\langle 0 | \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1} \dots \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{2p}} | 0 \rangle = \sum_{\text{combinaisons paires}} \prod_{(i,j)} \langle 0 | \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_i} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_j} | 0 \rangle \quad (81)$$

$$\langle 0 | \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1} \dots \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{2p+1}} | 0 \rangle = 0. \quad (82)$$

Par la suite on identifie les moyennes sur le vide à des moyennes d'ensemble sur les variables 'classiques stochastiques' $\varphi_{\mathbf{k}}$.

- C'est la valeur de H qui va fixer les variations de l'amplitude des fluctuations de densité par la suite. Dans l'approximation du 'Slow roll' la valeur de H ne change que très peu pour les échelles accessibles à l'observation, et du coup on va avoir un spectre proche d'un spectre Harrison-Zeldovich. Pour être plus précis, le spectre de puissance du potentiel est en k^{-3} , celui de la densité sera en k^{n_s} avec $n_s \approx 1$.

- Comme on va le voir par la suite, dans ces approximations on a des fluctuations dites adiabatiques.

Conditions pour avoir un modèle d'inflation valide:

Il faut bien sûr que la pente du potentiel soit suffisamment faible pour que ça marche. En effet pour que l'inflation remplisse son rôle, i.e. remette causalement en relation des régions de l'Univers observable, il faut que cette expansion ait duré suffisamment longtemps. La sortie de l'inflation n'est pas forcément très bien comprise: les fluctuations de l'inflaton doivent être prises en compte dans la densité d'énergie. On a création de particules. Mais en fait cela n'affecte pas forcément le problème de la formation des grandes structures (voir figure 8).

L'amplitude des fluctuations sera de l'ordre de H , donc à peu de chose près constante sur les échelles qui nous intéressent: de 1 à $1000 h^{-1} \text{Mpc}$ on ne couvre qu'une petite fraction du temps d'inflation.

Cela a un certain nombre de conséquences:

- Univers à courbure plane;
- Fluctuations initiales gaussiennes;
- Un spectre de fluctuation invariant d'échelle dans les cas génériques, c'est à dire quand le potentiel de l'inflaton ne présente pas d'accident dans le domaine d'énergie qui nous intéresse.

3 Éléments de cosmologie, l'Univers inhomogène

3.1 La croissance des fluctuations

On s'intéresse ici à la croissance des fluctuations dans différents régimes, aussi bien pour des échelles plus grandes que l'horizon, plus petites, au moment de l'ère du rayonnement que de l'ère de la matière. Les calculs présentés dans cette section ont été fortement inspirés de la thèse de Wayne Hu (1995).

D'une manière générale il faut se donner une métrique qui puisse décrire les fluctuations scalaires. On est confronté au problème du choix des jauge, c'est à dire qu'il est possible de décrire les mêmes fluctuations physiques de différentes façons. Pour les fluctuations scalaires on peut choisir la jauge suivante (jauge Newtonienne ou longitudinale, voir Bardeen 1980),

$$g_{00} = -a^2 [1 + 2\psi(t) Q(\mathbf{x})] \quad (83)$$

$$g_{0i} = 0 \quad (84)$$

$$g_{ij} = a^2 [1 + 2\phi(t) Q(\mathbf{x})] \gamma_{ij} \quad (85)$$

Ici la composante 0 décrit le temps conforme η avec,

$$dt = a d\eta, \quad (86)$$

de telle manière qu'on puisse factoriser a dans la métrique. On va s'intéresser à l'évolution d'un certain mode de fluctuation de vecteur d'onde \mathbf{k} , c'est à dire d'un mode propre du Laplacien à 3D,

$$\nabla^2 Q \equiv \gamma_{ij} Q = -k^2 Q. \quad (87)$$

Ce mode propre est un champ scalaire. Il définit un champ vectoriel Q_i et un champ tensoriel Q_{ij} définis par

$$Q_i \equiv Q_{,i} \quad (88)$$

$$Q_{ij} \equiv \frac{1}{k^2} Q_{|ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} Q. \quad (89)$$

L'idée est alors de linéariser les équations d'Einstein en ϕ et ψ en supposant qu'on a des fluctuations de densité dans chacun des fluides cosmiques.

Evidemment on peut compliquer à l'infini les modèles cosmologiques en introduisant des tas de composantes, mais pour se fixer les idées je vais supposer qu'on a essentiellement 3 composantes, des photons (et des neutrinos), des baryons et de la matière noire. Cette matière noire sera de plus supposée massive, autrement dit ce sont des modèles de type CDM que je vais considérer en priorité.

La partie la plus difficile des calculs à mettre en œuvre concerne la description du couplage des photons. On doit écrire l'équation d'évolution de la densité de photons $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ dans l'espace des phases. Formellement cela s'écrit sous la forme d'une équation de Boltzmann,

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (90)$$

où $C[f]$ est le terme de collisions, diffusion Thomson des photons sur les électrons libres.

Il faut noter que, la diffusion Thomson et les effets Doppler n'affectent pas la nature thermique de la distribution d'énergie des photons. Cela justifie que l'on identifie les fluctuations d'énergie des photons avec les fluctuations locales de température (à un facteur 4 près). On définit,

$$\theta(\mathbf{x}, \gamma) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi^2 \rho_\gamma} \int p^3 dp f - 1 \right). \quad (91)$$

C'est la température des photons au point \mathbf{x} dans la direction γ . L'équation des géodésiques s'écrit,

$$\frac{d}{d\eta}(\theta + \psi) = \frac{\partial}{\partial \eta}(\psi - \phi) \quad (92)$$

auquel il faut rajouter un terme de collisions. On peut exprimer le résultat sous forme d'une hiérarchie sur les coefficients d'une décomposition multipolaire de θ ,

$$\theta(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_l \theta_l(\mathbf{k}) P_l(\hat{\mathbf{k}}, \gamma) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (-i)^l. \quad (93)$$

L'équation des géodésiques avec terme de collisions donne alors,

$$\dot{\theta}_0 = \frac{-k}{3}\theta_1 - \dot{\phi} \quad (94)$$

$$\dot{\theta}_1 = k \left[\theta_0 + \psi - \frac{2}{5}\theta_2 \right] - n_e x_e \sigma_T (\theta_1 - V_b) \quad (95)$$

$$\dot{\theta}_2 = k \left[\frac{2}{3}\theta_1 - \frac{3}{7}\theta_3 \right] - \frac{9}{10} n_e x_e \sigma_T \theta_2 \quad (96)$$

$$\dots$$

$$\dot{\theta}_l = k \left[\frac{l}{2l-1}\theta_{l-1} - \frac{l+1}{2l+3}\theta_{l+1} \right] - n_e x_e \sigma_T \theta_l \text{ pour } l > 2. \quad (97)$$

On reconnaît un terme de couplage entre les photons et la matière baryonique où n_e est la densité déléctrons, x_e la fraction d'ionisation et σ_T est la section efficace de la diffusion Thomson.

La partie sans couplage correspond à la diffusion libre. C'est le système d'équations qu'on a pour les neutrinos.

Si je veux pouvoir écrire les équations d'Einstein je dois, pour chaque espèce x , écrire le tenseur énergie impulsion,

$$T_0^0 = -[1 + \delta_x(t) Q(\mathbf{x})]\rho_x(t) \quad (98)$$

$$T_i^0 = [\rho_x(t) + p_x(t)] V_x(t) Q_i(\mathbf{x}) \quad (99)$$

$$T_j^i = p_x(t) \left[\delta_j^i + \frac{\delta p_x(t)}{p_x(t)} \delta_j^i Q(\mathbf{x}) + \Pi_x(t) Q_j^i(\mathbf{x}) \right]. \quad (100)$$

On peut alors écrire les équations de continuité pour chacun des fluides jusqu'à l'ordre 1 par rapport aux fluctuations de densité. A l'ordre 0 on obtient,

$$\dot{\rho}_x = -3 \left(1 + \frac{p_x}{\rho_x} \right) \frac{\dot{a}}{a} \rho_x \quad (101)$$

Cette une équation déjà connue.

A l'ordre 1 des perturbations on a, à partir de $T_{;\mu}^{\mu 0} = 0$,

$$\dot{\delta}_x = - \left(1 + \frac{p_x}{\rho_x} \right) \left(k V_x + 3 \dot{\phi} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \delta \left(\frac{p_x}{\rho_x} \right). \quad (102)$$

Si on applique cette relation aux photons on a,

$$\dot{\delta}_\gamma = -\frac{4}{3} \left(k V_\gamma + 3 \dot{\phi} \right), \quad (103)$$

et si on l'applique à la matière,

$$\dot{\delta}_{\text{mat.}} = - \left(k V_{\text{mat.}} + 3 \dot{\phi} \right). \quad (104)$$

Pour les photons on retrouve la première équation de la hiérarchie précédente. Cela implique en particulier que,

$$\frac{d}{d\eta} \left(\delta_{\text{mat.}} - \frac{3}{4} \delta_\gamma \right) = k(V_\gamma - V_{\text{mat.}}). \quad (105)$$

On a des équation du mouvement (d'Euler) pour chacun des fluides s'obtiennent à partir de $T_{;\nu}^{\nu i} = 0$. Pour les photons l'équation est déjà écrite. En appliquant cette contrainte au mélange photons+baryons on a

$$\dot{V}_b = -\frac{\dot{a}}{a} V_b + k\psi + \frac{4\rho_b}{3\rho_\gamma} n_e x_e \sigma_T (V_\gamma - V_b). \quad (106)$$

Il reste pour la composante matière froide,

$$\dot{V}_{CDM} = -\frac{\dot{a}}{a} V_{CDM} + k\psi. \quad (107)$$

Pour clore mon système d'équation je dois écrire les équations de Poisson (i.e. les équations d'Einstein) qui donnent,

$$k^2 (\psi + \phi) = -8\pi G a^2 p_T \Pi_T; \quad (108)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} \psi - \dot{\phi} = 4\pi G a^2 (\rho_T + 3p_T) \frac{V_T}{k}; \quad (109)$$

$$k^2 \phi = 4\pi G a^2 \rho_T \left(\delta_T + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) (1 + p_T/\rho_T) \frac{V_T}{k} \right), \quad (110)$$

ce qui donne un système fermé.

Quelques remarques:

- Les indices T font référence à des quantités totales (obtenues en sommant sur tous les fluides pondérés par leur densité moyenne respective).
- Ces équations dépendent de la jauge utilisée. En particulier le terme de source de l'équation de Poisson proprement dite (la dernière) s'identifie dans une certaine jauge à la fluctuation de densité totale.
- Π_T est la partie anisotrope de la pression. Elle est nulle pour la matière ($p = 0$ de toute façon). Elle est nulle pour les photons quand ils sont couplés aux baryons. La seule contribution résiduelle vient des neutrinos après qu'ils se soient découplés de la matière.

A partir de là je peux chercher à calculer les différents modes de croissance. Le schéma de la Fig. 9 montre les différents régimes et leur enchaînement.

Une quantité importante est la traversée de l'horizon. Dans l'espace de Fourier cela est donné par $k\eta = 1$ (η est le temps conforme).

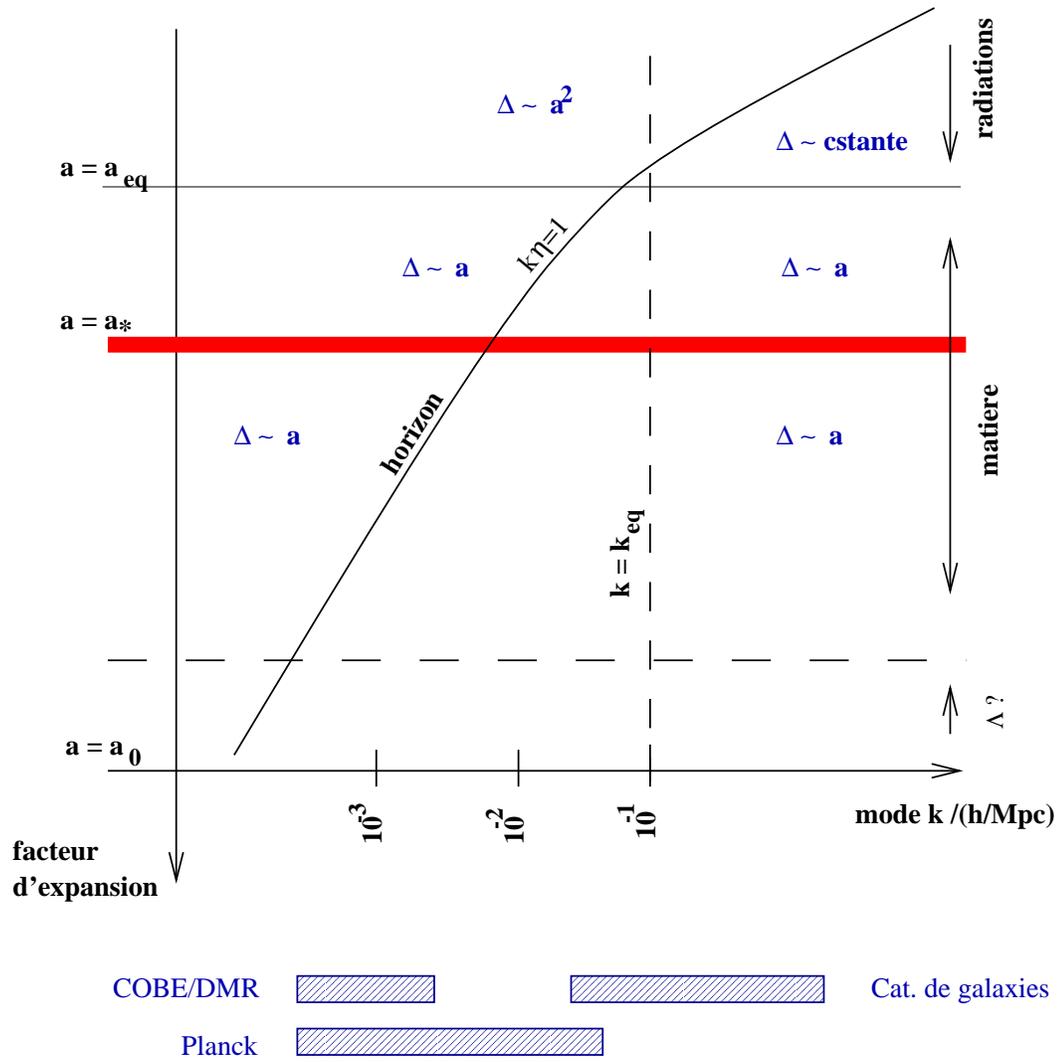


Figure 9: Les différents régimes de croissance gravitationnelle. Δ donne la croissance du contraste de densité de la matière noire froide. Les zones hachurées du bas montrent les différents domaines accessibles aux observations.

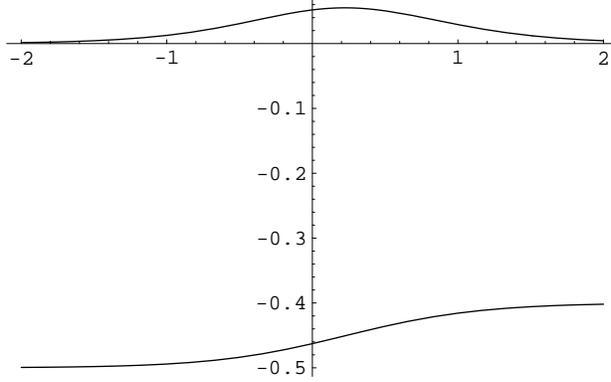


Figure 10: Evolution de l'amplitude du potentiel gravitationnel à grande échelle au moment du passage de l'équivalence. La courbe du haut donne la variation de ψ (source de l'effet ISW) et la courbe du bas, $\theta_0 + \psi$.

- À une échelle plus grande que l'horizon, $k\eta \ll 1$, Univers dominé par le rayonnement. On a

$$\frac{d}{d\eta}(V_{\text{mat.}} - V_\gamma) = -\frac{\dot{a}}{a}(V_{\text{mat.}} - V_\gamma); \quad (111)$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\delta_{\text{mat.}} - \frac{3}{4}\delta_\gamma\right) = k(V_{\text{mat.}} - V_\gamma). \quad (112)$$

Dans une théorie inflationnaire à champ simple la matière tombe dans les potentiels ensemble. Il n'y a pas de création d'entropie, donc,

$$\delta_{\text{mat.}} = \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad (113)$$

$$V_{\text{mat.}} = V_\gamma. \quad (114)$$

Dans le cas contraire (inflation hybride...) on peut avoir des fluctuations isocourbes: fluctuation de la composition de l'Univers sans fluctuation de courbure.

Finalement on doit résoudre,

$$\frac{\dot{a}}{a}\psi + \dot{\psi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\delta_\gamma; \quad \dot{\delta}_\gamma = 4\dot{\psi}, \quad (115)$$

ce qui donne après avoir éliminer δ_γ

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + 4\frac{d\psi}{da} = 0 \quad (116)$$

dont la solution générale est,

$$\psi \sim \psi_C + \psi_D \frac{1}{a^3}. \quad (117)$$

On a un terme 'croissant' et un terme 'décroissant'. Pour ce terme dit croissant. Les fluctuations de densités (que j'identifie de manière générale avec le terme de source de l'équation de Poisson) croissent comme $k^2 \eta^2$.

- La traversée de l'équivalence à une échelle plus grande que l'horizon. L'équation générale s'écrit en fait,

$$\frac{\dot{a}}{a} \psi + \dot{\psi} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{\delta_\gamma}{4} \frac{4 + 3a/a_{\text{eq.}}}{1 + a/a_{\text{eq.}}}; \quad \dot{\delta}_\gamma = 4\dot{\psi}, \quad (118)$$

Il existe une solution explicite (voir Fig.). Finalement on a,

$$\psi(a \rightarrow \infty) = \frac{9}{10} \psi(a \rightarrow 0) \quad (119)$$

$$\frac{\delta_\gamma(a \rightarrow \infty)}{4} = -\frac{2}{3} \psi(a \rightarrow \infty), \quad (120)$$

et on remarquera que $\delta_\gamma/4$ s'identifie à la fluctuation locale de température.

- La traversée de l'horizon. C'est là que les choses deviennent plus compliquées puisqu'il faut tenir compte des interactions entre photons et baryons. Tant qu'on est avant la recombinaison ces 2 fluides restent couplés, mais la matière non-baryonique n'est plus couplée à ceux-ci. Quand le rayonnement domine on a,

$$\delta_\gamma'' + \frac{k^2}{3} \delta_\gamma = 4\ddot{\psi} - \frac{4}{3} k^2 \psi. \quad (121)$$

Du coup les fluctuations sont piégées dans des ondes acoustiques. La matière non-baryonique est spectatrice. Quand le rayonnement domine l'équation d'évolution des fluctuations de matière sont alors,

$$\ddot{\delta}_{CDM} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_{CDM} = -3\ddot{\phi} - k^2 \psi - 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi}. \quad (122)$$

Le membre de droite est un terme de source déterminé par le comportement des photons. Comme les croissances des fluctuations pour les photons sont interrompues, on a essentiellement une équation homogène dont la solution croissante est une croissance logarithmique de la fluctuation de densité.

- Univers dominé par la matière. Cette fois le terme de source de l'équation d'évolution est donné par la matière elle-même. En fait je retombe sur

une équation déjà écrite précédemment, et les potentiels sont de nouveau constants: les fluctuations de densité croissent comme $\eta^2 \sim a$.

Par contre le fluide photons+baryons connaît toujours des oscillations acoustiques. La vitesse du son c_s est maintenant donnée par,

$$c_s^2 = \frac{1}{3(1 + \rho_b/\rho_\gamma)}. \quad (123)$$

On a essentiellement,

$$\frac{\delta_\gamma}{4} \sim \cos(k \int_0^\eta c_s d\eta) \quad (124)$$

$$V_\gamma \sim \sin(k \int_0^\eta c_s d\eta). \quad (125)$$

(si c_s était constant cela ferait $k\eta/\sqrt{3}$ dans l'argument des fonctions trigonométriques).

Quelles sont les conséquences observationnelles? Il y a essentiellement 2 aspects qui sont importants d'un point de vue observationnel. Les fluctuations de températures sur le 3K et les fluctuations de densité qui vont donner naissance aux grandes structures de l'Univers.

- Les fluctuations de température. Localement on peut décomposer les fluctuations de température du rayonnement dans son espace des phases par,

$$\theta(\gamma) \equiv \left(\frac{\int p^3 dp f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\pi^2 \rho_\gamma} - 1 \right) / 4 = \sum_{l,m} a_{l,m} Y_l^m(\gamma), \quad (126)$$

où $\theta(\gamma)$ est la fluctuation de température dans la direction γ , décomposée en harmonique sphérique (implicitement à la position de l'observateur). Pour un champ de fluctuations isotropes on a

$$\langle a_{l,m} a_{l',m'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (127)$$

Cela définit les C_l .

Les anisotropies du 3K permettent de voir en quelque sorte l'état du plasma photons+baryons au moment de la recombinaison. Après la recombinaison les photons se découplent complètement, leur libre parcours moyen devient infini, ils diffusent donc librement. Les anisotropies de températures sont alors la superposition de 3 effets différents: les fluctuations de température intrinsèques, les fluctuations de potentiel qui induisent des effets de redshift gravitationnel, enfin des effets Doppler dus aux mouvements du fluide le long de la ligne de visée. Il y a un cut-off naturel aux petites échelles dû au fait que la surface de dernière diffusion

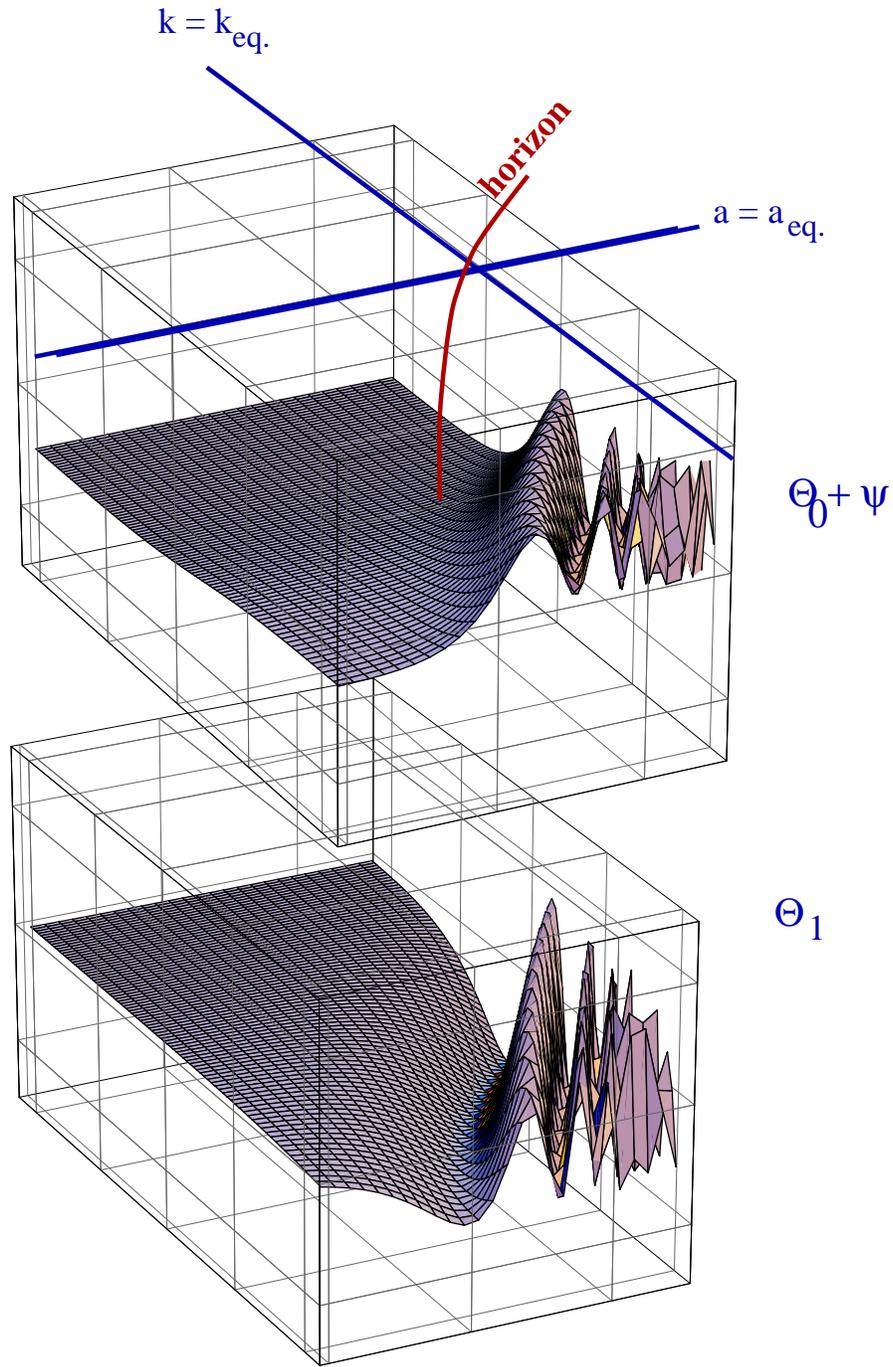


Figure 11: Evolution de l'amplitude des fluctuations intrinsèques de température (en haut) et de la vitesse particulière (en bas) en fonction du facteur d'expansion et du mode k .

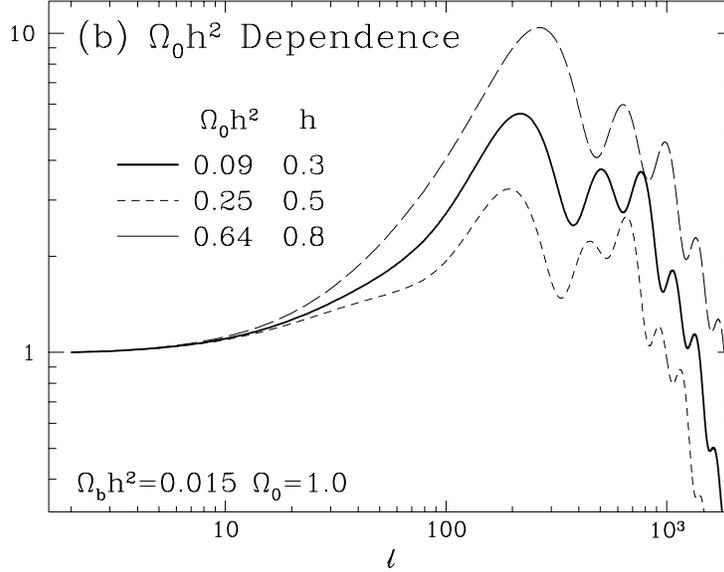


Figure 12: Exemples de spectre de fluctuations de température pour des modèles standards CDM. C'est la quantité $C_l l(l+1)$ qui est donnée en fonction de l . Différentes valeurs de $\Omega_0 h^2$ sont proposées (figure tirée de Hu, 1995).

a une épaisseur finie (ce qui induit un 'Silk damping'). L'amplitude du mode l est donnée essentiellement par,

$$\frac{\theta_l}{2l+1} \sim \left[(\theta_0(\eta_*) + \psi(\eta_*)) j_l(k\eta_*) + \theta_1 \frac{1}{k} \frac{d}{d\eta} j_l(k\eta) + \right. \quad (128)$$

$$\left. + \int_{\eta_*}^{\eta_0} (\dot{\psi}(\eta') - \dot{\phi}(\eta')) j_l(k\eta') d\eta' \right] \exp(-k^2/k_D^2), \quad (129)$$

pour un mode \mathbf{k} . Cette expression est valable dans la limite d'une surface de dernière diffusion infiniment mince. Le première correction à cette limite donne un effet d'amortissement à petite échelle, le 'Silk damping' à une échelle k_D liée à la longueur de diffusion des photons. En général il faut résoudre un système d'équations couplées pour obtenir les différents moments. La projection des fluctuations locales de température sur les harmoniques sphériques fait intervenir des fonctions de Bessel j_l pour le cas d'un univers plat. Pour un univers avec $k \neq 0$, c'est plus compliqué. On a alors un spectre C_l typiquement de la forme donnée par la figure 12.

A ce jour, on ne connaît correctement que la partie à grande échelle grâce aux observations de COBE/DMR. La forme des pics acoustiques est une chose que les gens cherchent activement à mesurer parce qu'ils contiennent des informations précieuses sur les paramètres cosmologiques. Il y a en préparation de nombreuses expériences sol ou ballon, sans compter les

projets satellitaires américains avec MAP ou européens avec Planck, qui doivent mesurer ces anisotropies avec des sensibilités et des précisions diverses.

- La conséquence observationnelle qui va davantage m'intéresser ici est le spectre de puissance $P(k)$ des fluctuations de densité de la matière. Dans les modèles avec de la matière noire en quantité dominante les baryons ne vont contribuer à la forme de ce spectre que de manière mineure.

Du coup k_{eq} , échelle qui traverse l'horizon au moment de l'équivalence qui est un paramètre essentiel de la forme du $P(k)$. En effet les modes k inférieurs à k_{eq} croissent régulièrement, comme η^2 , alors que les modes avec k plus grand que k_{eq} sont gelés entre la traversée de l'horizon et l'équivalence.

Pour les modèles les plus réalistes, le $P(k)$ a une forme simple sans structures particulières. En particulier les oscillations plasma ne se voient que lorsque la fraction de baryons est suffisante.

En résumé on a

$$P(k) \propto k \text{ pour } k \gg k_{\text{eq}}, \quad (130)$$

$$P(k) \propto k^{-3} \text{ pour } k \ll k_{\text{eq}}, \quad (131)$$

pour un spectre initial Harrison-Zeldovich.

3.2 Pourquoi un modèle avec de la Matière Noire Froide ?

La première raison est de rendre compatible le niveau des anisotropies du 3K avec les fluctuations de densité dans l'Univers local. Au moment de la recombinaison les fluctuations de densité de la matière noire peuvent en effet être beaucoup plus grandes que celles des photons+baryons. Les baryons tombent dans les puits de potentiel de la matière noire après la recombinaison. Du coup, on peut très bien avoir des anisotropies de température à un niveau bas tout en ayant des fluctuations de densité de la matière noire relativement importantes.

3.3 Évidences de l'existence de matière noire

Evidemment cette belle idée doit être soutenue de manière expérimentale en essayant de détecter la matière noire non-baryonique de manière directe.

Les évidences sont les suivantes,

- Les courbes de rotation des galaxies. Cela s'applique aux halos des galaxies.

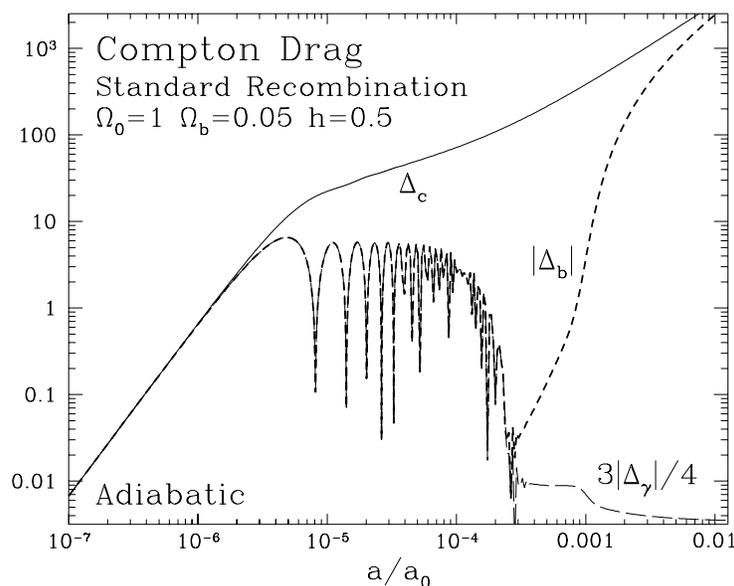


Figure 13: Evolution à petite échelle du contraste en densité des baryons comparé à celui de la matière noire froide. Les baryons restent couplés très longtemps aux photons. Au moment de la surface de dernière diffusion, le contraste en densité atteint par la matière noire froide peut être beaucoup plus important que celui des baryons (figure tirée de Hu, 1995).

- Les études dynamique des amas de galaxies. Un amas de galaxies est un immense puit de potentiel dans lequel les galaxies sont liées. La mesure de leur dispersion de vitesse permet d'estimer la masse de l'amas.
- Les mesures de masse par effet de lentille. Exemple A2218 avec un système d'arcs. C'est très propre puisque c'est une détection directe de la masse projetée, par d'hypothèse sur l'équilibre hydrodynamique dans l'amas. C'est une méthode très prometteuse car elle peut s'appliquer à toutes les échelles, aussi bien pour sonder les halos des galaxies, que pour faire des détections de la matière gravitante à grande échelle.
- Les champs de vitesse à grande échelle. L'idée est de mesurer les vitesses particulières, écarts des vitesses d'éloignement avec le flot de Hubble, à l'aide d'indicateurs spécifiques (de type dispersion de vitesse). C'est un domaine potentiellement très intéressant, cependant il souffre d'un défaut important: les erreurs de mesure augmentent avec la distance. Au delà de $50 h^{-1}$ Mpc les erreurs dépassent les 100% sur une galaxie individuelle. Cela vient des dispersions intrinsèques des relations utilisées et pas des erreurs de mesures.

3.4 Modèles alternatifs

Les modèles avec défauts topologiques sont de moins en moins crédibles en tant que mécanisme pour former les grandes structure. La principale raison est qu'il est très difficile de concilier le niveau des anisotropies vues par COBE avec l'amplitude des fluctuations à grande échelle (voir l'article recent de Albrecht 1998).

Le calcul de la croissance des fluctuations dans de tels modèles est rendu très difficile par l'existence de termes de sources dans les équations d'Einstein. Il faut tenir compte de la dynamique propre des sources, et des corrélations non-triviales qu'elles induisent à des temps différents.

4 La dynamique gravitationnelle, les théories linéaires

A partir de maintenant je m'intéresse à la dynamique de la matière noire en effondrement gravitationnel.

4.1 Équation d'évolution dans l'espace des phases

Sous l'horizon l'équation dynamique s'écrit,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u} = \mathbf{g} = G\bar{\rho} a \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\delta(\mathbf{x}') (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (132)$$

où \mathbf{u} est la vitesse particulière des particules (écart de la vitesse totale avec le flot de Hubble). L'impulsion s'identifie à (c'est aussi la variable conjuguée de $\dot{\mathbf{x}}$ dans le Lagrangien décrivant la dynamique),

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} m a. \quad (133)$$

J'écris la densité dans l'espace des phases,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{p}, \quad (134)$$

où \mathbf{x} est la position comovante et \mathbf{p} est l'impulsion. Le théorème de Liouville appliqué à l'évolution de la densité f donne,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - m \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (135)$$

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = \frac{4\pi G m}{a} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}. \quad (136)$$

Dans toute sa généralité cette équation est évidemment très difficile à résoudre.

On peut prendre différents moments de cette équation par rapport à \mathbf{p} . La densité de matière est par construction,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{a^3} \int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}). \quad (137)$$

J'écris cette densité

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t) [1 + \delta(\mathbf{x}, t)], \quad (138)$$

et alors $\bar{\rho}(t) \propto a^3$. La vitesse moyenne est \mathbf{u} donnée par,

$$\mathbf{u} = \frac{\int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{m a \int f d^3\mathbf{p}}, \quad (139)$$

et je vais écrire de manière un peu cavalière que,

$$\frac{\int d^3\mathbf{p} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{m^2 a^2 \int f d^3\mathbf{p}} = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j + \langle \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \rangle_c. \quad (140)$$

Quand on intègre l'équation de Liouville par rapport à \mathbf{p} on obtient,

$$\bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \text{ soit } , \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot (1 + \delta(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad (141)$$

c'est à dire une équation de continuité.

Quand on intègre l'équation par rapport à \mathbf{p} après l'avoir multiplié par \mathbf{p} on a,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i f d^3\mathbf{p} + \frac{1}{m a^2} \partial_j \int p_i p_j f d^3\mathbf{p} + a^3 \rho(\mathbf{x}, t) \Phi_i = 0. \quad (142)$$

Je peux réécrire cette équation en faisant apparaître la vitesse particulière,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u}_i + \frac{1}{a} (\mathbf{u}_j \cdot \nabla_j) \mathbf{u}_i = -\frac{1}{a} \nabla_i \Phi - \frac{1}{\rho a} (\rho \langle u_i u_j \rangle_c)_{,j}. \quad (143)$$

Faisons des hypothèses supplémentaires. Si localement le fluide est thermalisé on a

$$\langle u_i u_j \rangle_c = \delta_{ij} \frac{p}{\rho}. \quad (144)$$

La dispersion de vitesse locale s'identifie avec la pression en supposant qu'elle est isotrope. On a alors,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u}_i + \frac{1}{a} (\mathbf{u}_i \nabla_j) \mathbf{u}_j = -\frac{1}{a} \nabla_i \phi - \frac{p_{,i}}{\rho a}. \quad (145)$$

Si on se donne une équation d'état on peut alors fermer le système.

4.2 La longueur de Jeans

Une question qu'on peut se poser est de savoir à quelle échelle la pression peut jouer un rôle et freiner les effondrements gravitationnels. Pour faire ce calcul il faut se donner une expression pour la pression.

Par exemple, pour un gaz mono-atomique on a,

$$c_s^2 \equiv \frac{dp}{d\rho} = \frac{5 kT}{3 m} \quad (146)$$

On peut ensuite linéariser les équations d'évolution, ce qui donne

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (147)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta + 4 \pi G \bar{\rho} \delta. \quad (148)$$

puisque

$$p = \bar{p} + c_s^2 \bar{\rho} \delta. \quad (149)$$

Cela définit une longueur caractéristique, la longueur de Jeans, avec

$$\lambda_J = c_s (\pi / G \bar{\rho})^{1/2}. \quad (150)$$

Les fluctuations de taille plus grande que λ_J s'effondrent librement sans être contrer par la pression. Cela donne des échelles de masse de $10^5 M_\odot$. Pour les échelles cosmologiques (i.e. la masse d'une galaxie est typiquement de $10^{12} M_\odot$, celle d'un amas de $10^{15} M_\odot$) on peut donc en toute sécurité négliger la pression due aux fluctuations thermiques.

Notons quand même qu'admettre que la pression est nulle c'est dire que

$$\langle u_i u_j \rangle_c = 0 \quad (151)$$

donc la densité dans l'espace des phases peut s'écrire

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \rho(\mathbf{x}) \delta^{(3)}[\mathbf{p} - m a \mathbf{u}(\mathbf{x})]. \quad (152)$$

Cela revient à supposer qu'en tout point on a un seul flot. Cela ne sera vrai qu'au début de la dynamique. Ultérieurement on s'attend à avoir des croisements de coquilles (voir fig 14).

4.3 L'approximation Newtonnienne avec un seul flot

Dans l'approximation à un seul flot, on a finalement le système d'équation suivant,

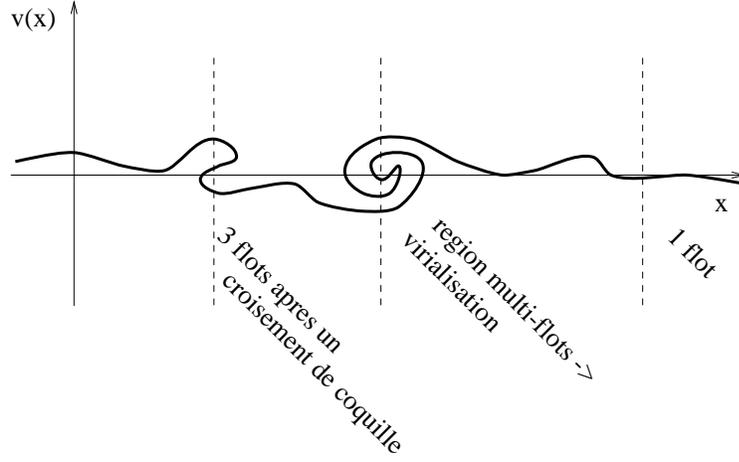


Figure 14: Description schématique de l'espace des phases après les premiers croisements de coquilles.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (153)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (154)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \psi(\mathbf{x}, t) - 4\pi G [\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)] a^2 = 0. \quad (155)$$

C'est ce qu'on appelle une description Eulérienne de la dynamique.

4.4 Description Eulérienne ou description Lagrangienne

On peut en faire une description équivalente en ayant une approche Lagrangienne. L'idée est de décrire la trajectoire des particules à partir de leur position dans l'espace de départ \mathbf{q} . On écrit donc qu'une particule initialement en \mathbf{q} se trouve à un instant t à la position (comouvante) \mathbf{x} après s'être déplacée de $\Psi(\mathbf{q}, t)$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \Psi(\mathbf{q}, t). \quad (156)$$

Le champ déplacement $\Psi(\mathbf{q}, t)$ est donné par la même équation d'Euler simplement la densité est donnée par l'inverse du Jacobien de la transformation de \mathbf{q} vers \mathbf{x} . Plus explicitement on peut montrer que

$$J(\mathbf{q}, t) \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right| = 1 + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi(\mathbf{q}, t) + \frac{1}{2} \left[(\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi)^2 - \sum_{ij} \Psi_{i,j} \Psi_{j,i} \right] \quad (157)$$

$$+\frac{1}{6} \left[(\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi)^3 - 3 \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi \sum_{ij} \Psi_{i,j} \Psi_{j,i} + 2 \sum_{ijk} \Psi_{i,j} \Psi_{j,k} \Psi_{k,i} \right].$$

On va voir que selon le problème qui nous intéresse on pourra prendre l'une ou l'autre des formulations.

4.5 La croissance des fluctuations en théorie linéaire

La théorie linéaire consiste à supposer que les fluctuations sont de faible amplitude, $\delta \ll 1$. Pour une description Lagrangienne, cela veut dire que les gradients du champ de déplacement sont faibles, et donc que le Jacobien de la transformée est proche de 1.

Dans le régime linéaire il est plus simple de regarder la description Eulérienne. La linéarisation des équations donne,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (158)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4 \pi G \bar{\rho} \delta. \quad (159)$$

La deuxième équation permet de rechercher les modes de fluctuation. On trouve 2 modes,

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_+(t) \delta_+(\mathbf{x}) + D_-(t) \delta_-(\mathbf{x}), \quad (160)$$

dont la dépendance en t dépend des paramètres cosmologiques (elle est cachée dans la dépendance en temps du facteur d'expansion). Pour être plus spécifique on a,

$$\ddot{D} + 2 H \dot{D} - \frac{3}{2} H^2(t) \Omega(t) D = 0 \quad (161)$$

qui est valable pour tous les modèles cosmologiques.

Pour un Univers Einstein-de Sitter on a,

$$D_+(t) \propto t^{2/3}, \quad (162)$$

$$D_-(t) \propto 1/t. \quad (163)$$

Notons que D_+ peut s'exprimer analytiquement en fonction de t si $\lambda = 0$. Il doit être calculer numérique pour des modèles avec constante cosmologique.

Une quantité utile est la dérivée logarithmique de D_+ avec le facteur d'expansion, puisqu'elle apparaît de manière naturelle dans l'équation de continuité. On a un fit analytique de la forme (Lahav et al. 1991),

$$f(\Omega, \Lambda) \equiv \frac{d \log D_+}{d \log a} = \Omega^{0.6} + \frac{1}{70} \Lambda (1 + \Omega/2). \quad (164)$$

On voit que ça dépend très peu de la constante cosmologique.

Une relation intéressante en théorie linéaire est la relation densité-vitesse. Localement elle s'écrit à partir de la relation de continuité,

$$\theta(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{aH} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -f(\Omega, \Lambda) \delta(\mathbf{x}). \quad (165)$$

Remarquons que θ est bien a priori une quantité observable qui ne dépend pas de la constante de Hubble. Les flots à grande échelle sont connus en km/s , à des distance qui sont déterminées en km/s . Plus précisément θ exprime les fluctuations locales de la constante de Hubble, i.e. du taux d'expansion.

Cette relation a évidemment une contrepartie non-locale qui exprime la relation entre la vitesse locale et les fluctuations de densité environnantes,

$$\frac{\mathbf{u}}{aH} = \frac{f(\Omega)}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \delta(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (166)$$

Cette relation exprime que la vitesse acquise par une particule en régime linéaire est proportionnelle à son accélération.

À ce niveau on peut facilement donner une interprétation des modes croissants et décroissants. Le mode croissant correspond au cas où le champ de densité et de vitesse sont en 'phase': quand la matière tombe vers les puits de potentiel. On peut très bien imaginer qu'on puisse construire un champ de vitesse qui soit tel que que les particules aient tendance à s'échapper des puits de potentiel et tendent ainsi à effacer les fluctuations initiales. Ce serait le mode décroissant.

4.6 L'approximation de Zel'dovich

Cela consiste à prendre la solution linéaire pour le champ de déplacement mais à garder l'équation de continuité dans toute sa généralité (Zel'dovich 1970). Dans une telle approximation, le champ de déplacement s'écrit comme la somme de deux termes,

$$\psi(\mathbf{q}, t) = D_+(t)\psi_+(\mathbf{q}) + D_-(t)\psi_-(\mathbf{q}), \quad (167)$$

où $D_+(t)$ et $D_-(t)$ sont les fonctions du temps solution de l'équation précédente. On retrouve des termes croissants et des termes décroissants. Quand on ne garde que le terme croissant, on a une factorisation dans la dépendance en temps et la dépendance en espace. Les trajectoires des particules sont donc rectilignes et suivent la direction de la force appliquée aux particules à l'instant initial.

La densité locale peut alors s'exprimer en fonction des valeurs propres de la matrice de déformation. Plus précisément on a,

$$\rho = \frac{1}{(1 - \lambda_1 D_+)(1 - \lambda_2 D_+)(1 - \lambda_3 D_+)}, \quad (168)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice $\psi_{i,j}$.

Pour des conditions initiales Gaussiennes on peut alors calculer la distribution de densité locale à partir de la distribution des valeurs propres. La distribution des valeurs propres est donnée par (Doroshkevich 1970),

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 = d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (169)$$

$$\frac{5^{5/2} 27}{8\pi\sigma_0^6} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \exp\left[-\frac{1}{\sigma_0^2}\left(3J_{01}^2 - \frac{15}{2}J_{02}\right)\right], \quad (170)$$

où

$$J_{01} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (171)$$

$$J_{02} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3. \quad (172)$$

On peut alors calculer la fonction de distribution de probabilité de la densité locale dans cette approximation (Kofman et al. 1994),

$$P(\rho)d\rho = \frac{9 \cdot 5^{3/2} d\rho}{4\pi N_s \rho^3 \sigma^4} \int_{3(\frac{1}{\rho})^{1/3}}^{\infty} ds e^{-(s-3)^2/2\sigma^2} \quad (173)$$

$$\times \left(1 + e^{-6s/\sigma^2}\right) \left(e^{-\beta_1^2/2\sigma^2} + e^{-\beta_2^2/2\sigma^2} - e^{-\beta_3^2/2\sigma^2}\right), \quad (174)$$

$$\beta_n(s) \equiv s \cdot 5^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \cos\left[\frac{2}{3}(n-1)\pi + \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{54}{\rho s^3} - 1\right)\right]\right), \quad (175)$$

où paramètre $\sigma(t) = D(t)\sigma_0$ est la déviation standard des fluctuations de densité ρ dans la théorie linéaire et N_s est le nombre moyen de flots ($N_s = 1$ dans le régime à 1 flot).

4.7 La vorticité

Il n'est pas inutile de remarquer que la vorticité va être diluée par l'expansion. Si on définit la vorticité par,

$$\mathbf{w}_k = (\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{j,i}) \epsilon^{ijk}, \quad (176)$$

(ϵ^{ijk} est le tenseur totalement antisymétrique) on a (en régime linéaire),

$$\dot{\mathbf{w}} = -\frac{\dot{a}}{a} \mathbf{w}. \quad (177)$$

Il n'y a évidemment pas de terme de source. La vorticité est un mode décroissant: elle est diluée par l'expansion (i.e. conservation du moment angulaire).

Cette propriété est en fait vraie à n'importe quel ordre de la théorie des perturbations. (Notons que sa mise œuvre pour l'approche Lagrangienne est loin d'être triviale).

4.8 Domaine de validité de l'approximation linéaire

C'est valable au delà de $10 h^{-1}\text{Mpc}$. En effet la r.m.s. des fluctuations atteint 1 vers $8h^{-1}\text{Mpc}$. Les expériences numériques montre qu'une description linéaire est correcte au delà de cette échelle. On verra par la suite qu'à ces échelles on peut faire des choses plus sophistiquées que la théorie linéaire, mais d'une manière générale l'approche perturbative est valable à ces échelles.

Il est important d'avoir à l'esprit que la théorie linéaire ne change pas la forme du spectre de fluctuation mais uniquement son amplitude. Pour résumer on a,

$$P(k)^{\text{local}} = \left(\frac{D_+(a_0)}{D_+(a_*)} \right)^2 P(k)^{\text{recomb.}} = \left(\frac{D_+(a_0)}{D_+(a_*)} \right)^2 T^2(k) P(k)^{\text{prim.}}, \quad (178)$$

où $T(k)$ décrit la fonction de transfert qui contient toute la micro-physique de la recombinaison.

4.9 Les galaxies comme traceurs du champ de densité

Un moyen économique (mais relativement dangereux) de se faire une idée de la forme du spectre est de considérer la distribution des galaxies dans notre Univers local.

On a maintenant des données assez précises sur la forme du spectre dans notre Univers local. Une forme phénoménologique est donnée par (spectre obtenu à partir du catalogue angulaire APM par Baugh et Gaztañaga 1996),

$$P(k) \propto \frac{k}{[1 + (k/k_c)^2]^{3/2}} \quad (179)$$

avec

$$k_c = \frac{1}{20} h \text{ Mpc}^{-1}. \quad (180)$$

La normalisation du spectre est telle que la variance des contrastes en densité dans une sphère de rayon $8 h^{-1}\text{Mpc}$ est de l'ordre de l'unité,

$$\sigma_8 = \left\langle \left(\frac{3}{4\pi R_8^3} \int_{|\mathbf{x}| < R_8} \delta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \approx 1 \text{ pour } R_8 = 8 h^{-1} \text{ Mpc}. \quad (181)$$

La valeur de σ_8 pour les galaxies varie un peu avec la population d'objets sélectionnés. On observe en particulier une légère augmentation de σ_8 avec la luminosité des objets.

Pour ces raisons historiques, la normalisation du spectre de $P(k)$ est souvent discutée en terme de σ_8 . D'un point de vue dynamique il faut retenir que c'est une échelle de transition.

5 Vers la dynamique non-linéaire: l'effondrement sphérique

L'émergence de non-linéarités est en soit un problème difficile. Un cas simple pour lequel on peut calculer l'évolution de manière complète est de regarder l'effondrement d'une région à symétrie sphérique.

Je suppose donc que j'ai une fluctuation initiale de forme,

$$\delta_i(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|). \quad (182)$$

Pour simplifier on peut penser à un profil en marche d'escalier mais ce n'est pas nécessaire. À cette fluctuation on peut appliquer le théorème de Birkhoff, donc on peut écrire l'équation d'évolution du rayon de cette perturbation,

$$\ddot{R} = -\frac{GM(< R)}{R^2} \quad (183)$$

$$M(< R) = \left(\rho - \frac{\lambda}{4\pi G} \right) \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (184)$$

Tant qu'on a pas de shell-crossing, la masse (hors λ) se conserve. On a finalement une équation d'évolution tout à fait similaire à celle du facteur d'expansion, mais avec une constante d'intégration différente. La solution de cette équation est connue (quand $\lambda = 0$). Il reste une difficulté technique qui est d'exprimer la solution R en fonction de a . Quand $\Omega = 1$, c'est relativement simple (a et t sont simplement reliés) mais sinon la relation est formellement assez compliquée.

Les conditions initiales sont déterminées par la valeur de la sur-densité initiale,

$$\delta_i = \frac{3M}{4\pi R_i^3 \rho_0(t)} - 1, \quad (185)$$

où $\rho_0(t)$ est la densité moyenne de l'univers, et par la taille initiale R_i de la fluctuation.

Dans le cas d'un univers plat sans constante cosmologique, la sur-densité $\frac{3M}{4\pi R_i^3 \rho_0}$ ne dépend que du produit de la densité initiale et du facteur d'expansion dont l'univers a crû depuis le début de l'effondrement. La sur-densité s'écrit, quand la sur-densité initiale est positive,

$$\delta_i \frac{a(t)}{a(t_i)} = \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} (\theta - \sin \theta) \right)^{2/3} \quad (186)$$

$$\frac{3M}{4\pi R(t)^3 \rho_0(t)} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3}, \quad (187)$$

et, quand la sur-densité initiale est négative,

$$\delta_i \frac{a(t)}{a(t_i)} = -\frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} (\sinh \theta - \theta) \right)^{2/3} \quad (188)$$

$$\frac{3M}{4\pi R(t)^3 \rho_0(t)} = \frac{9 (\sinh \theta - \theta)^2}{2 (\cosh \theta - 1)^3}. \quad (189)$$

Il est intéressant de remarquer que la densité (exprimée comme le rapport $M < (R)/R^3$) est donnée en fonction de la fluctuation linéaire $\delta_i D_+$ approximativement par,

$$\rho \approx \frac{1}{\left(1 - \frac{2\delta_i D_+}{3}\right)^{3/2}} - 1. \quad (190)$$

Cette relation (exacte quand $\Omega \rightarrow 0$) est valable pratiquement pour n'importe quelles valeurs des paramètres cosmologiques. Ce qu'on voit c'est qu'au bout d'un temps fini, on rencontre une singularité, i.e. la densité devient infinie. Cette singularité est atteinte quand $\delta_i D_+(t) = \delta_c$ avec $\delta_c = 1.69$ pour la dynamique exacte dans un espace Einstein-de Sitter (dans la dynamique approchée ci-dessus $\delta_c = 1.5$). Si δ_i est négatif on ne rencontre pas de singularité, et la densité se comporte comme,

$$\rho \sim (-\delta_i D_+)^{-3/2}, \quad \delta_i < 0. \quad (191)$$

Les régions initialement sous-denses se vident donc peu à peu.

5.1 La virialisation

La description de l'effondrement par les équations précédentes n'est valable que lorsqu'on n'a pas de croisement de coquilles. Dès que l'on a des croisements, la masse $M(< R)$ n'est plus conservée.

Ce qui va se passer alors est un processus de virialisation, la matière va tendre vers un équilibre dynamique. Pour évaluer l'état final du système on peut faire un simple bilan énergétique. Pour un système isolé on a l'équation suivante,

$$\frac{d(K + V)}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a}(2K + V), \quad (192)$$

avec,

$$K = \sum_{\text{particules}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m a^2}, \quad (193)$$

$$V = \sum_{\text{paires}} -\frac{Gm^2}{2a |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (194)$$

Si on suppose que l'équilibre est atteint quand le second membre s'annule, alors le rayon de la structure qui se forme ainsi doit être la moitié du rayon de 'turn-around', rayon physique (et non-comovant) maximal atteint par la structure.

Cette idée a été vérifiée dans des simulations numériques. Au moins pour des structures suffisamment isolées, c'est une bonne description de ce qui se

passee. Le contraste en densité qui en résulte Δ , est de l'ordre de 200,

$$\Delta \equiv \frac{\rho_{\text{objet.}}}{\rho_0} \approx 200. \quad (195)$$

Les mécanismes de virialisation sont cependant loin d'avoir été élucidés.

5.2 La théorie de Press et Schechter

Comme application du modèle du collapse sphérique, on peut chercher à calculer le nombre d'objets virialisés qui sont formés à une époque donnée. L'idée est la suivante, on cherche la fraction de matière qui se trouve dans un objet virialisé de masse donnée.

La masse d'un objet par conservation de la masse est donnée par la taille R avec $M = 4\pi R^3/3$ de la perturbation initiale. On va donc chercher la probabilité qu'un point donné de l'Univers se trouve initialement dans une fluctuation de densité à l'échelle R qui soit telle qu'elle est virialisée à une époque ultérieure donnée. Cette probabilité donne alors la fraction de masse de l'Univers $f(> M)$ qui est dans des objets de masse plus grande que M ,

$$f(> M) = \int_{\delta_c D_+(t_i)/D_+(t_0)} d\delta_i p(\delta_i, R) \quad (196)$$

où $p(\delta)$ est la fonction de distribution de probabilité de la sur-densité initiale δ_i à une échelle de filtrage R . Pour des conditions initiales gaussiennes p est simplement une gaussienne de variance $\sigma_i(M)$ qui s'exprime en fonction du spectre et de la fenêtre de filtrage. Alors,

$$f(> M) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{Erf} \left[\frac{\delta_c D_+(t_i)}{\sqrt{2} D_+(t_0) \sigma_i(M)} \right] \right), \quad (197)$$

et donc

$$f(M) dM = \frac{-\delta_c}{\sqrt{2\pi} \frac{D_+(t_0)}{D_+(t_i)} \sigma_i(M)} \frac{d \log(\sigma_i(M))}{dM} \exp \left[-\frac{\delta_c^2}{2 \left(\frac{D_+(t_0)}{D_+(t_i)} \right)^2 \sigma_i^2(M)} \right] dM. \quad (198)$$

C'est une relation séduisante mais par bien des égards, très suspecte. On peut déjà remarquer que la fraction totale de matière dans des objets virialisés atteint 1/2 alors qu'on s'attendrait à ce que cela atteigne 100%. Il se trouve qu'en corrigeant cette formule d'un simple facteur 2 on a un bon accord avec les résultats de simulations numériques.

Le problème est que ce calcul ne prend pas en compte toutes les structures qui sont finalement susceptibles d'entraîner un point de matière donné.

Bond et al. 1991 ont donné une interprétation alternative à cette formule en prenant comme fenêtre de filtrage un filtre carré dans l'espace des phases. Alors

à chaque changement d'échelle la densité locale est donnée par une quantité supplémentaire qui est indépendante de la densité locale à l'échelle précédente. Le problème finalement peut se formuler sous forme d'une marche aléatoire. Cette approche a le mérite de redonner le facteur 2 (toute marche aléatoire croise une frontière fixe à distance finie), mais il reste que le problème n'a pas été résolu dans toute sa complexité (voir Blanchard et al. 1992).

En plus de la complexité du problème purement statistique, la dynamique d'un élément de volume pris au hasard n'est certainement pas toujours locale, i.e. dépendante uniquement de la surdensité locale, indépendante des effets de marées.

La théorie de Press et Schechter est en tout état de cause plus pertinente pour des objets isolés, rares, comme les amas de galaxie.

5.3 La densité d'amas pour contraindre l'amplitude du spectre de puissance $P(k)$

La densité des amas de galaxies est très utile pour contraindre l'amplitude du spectre de fluctuation, puisqu'elle teste le comportement de la distribution de densité initiale dans sa coupure exponentielle. Typiquement un amas correspond à un événement à 2, 3 σ par rapport aux fluctuations initiales. Même si il y a quelques incertitudes sur les préfacteurs, cela n'affecte pas trop les conclusions qu'on peut tirer sur la valeur de l'amplitude des fluctuations donc de σ_8 .

Comme on voit que la quantité qui est effectivement testée est une combinaison de D_+ et de σ on voit bien que l'on va contraindre une combinaison de σ_8 et des paramètres cosmologiques (avec une dépendance sur la forme du spectre que je vais ignorer dans la suite).

En pratique on a (voir par exemple Oukbir & Blanchard 1997, Eke et al. 1996),

$$\sigma_8 \Omega_0^{0.5} \approx 0.6 \pm 0.15. \quad (199)$$

Cette analyse dépend un peu de la forme du spectre. L'échelle de masse des amas est bien $8 h^{-1} \text{Mpc}$ pour un Univers Einstein-de Sitter mais ce n'est pas forcément vrai autrement. Notons que la dégénérescence entre Ω_0 et σ_8 peut être levée en examinant la dépendance en z de la distribution des amas (voir Oukbir et al. 1997).

6 Le régime quasilineaire, effets des couplages de modes

Dans cette partie je vais explorer la théorie des perturbations appliquée à la formation des grandes structures, d'un point de vue théorique mais aussi en illustrant ces techniques par des applications observationnelles possibles.

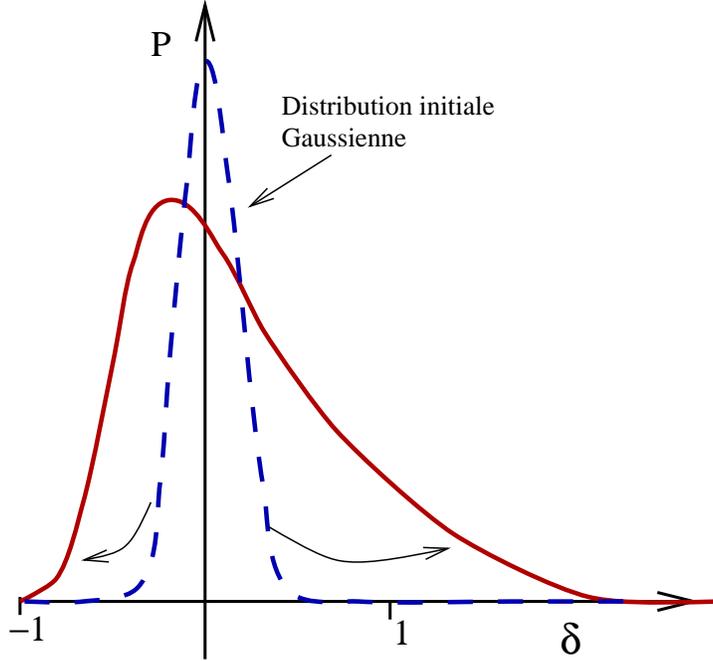


Figure 15: Evolution quasi-linéaire de la forme de la fonction de distribution de probabilité P quand on entre dans le régime non-linéaire. L'évolution différentielle entre les parties sur-denses et les parties sous-denses induit une asymétrie.

Un des objectifs de ces calculs est de déterminer des quantités statistiques qui tiennent compte aussi bien des propriétés statistiques initiales que de la dynamique. Une quantité plus particulièrement considérée (parce qu'elle est facile d'accès observationnellement aussi bien que numériquement) est la fonction de probabilité de la densité locale, $P(\delta)$.

En pratique le champ de densité est obtenu après filtrage d'une représentation discrète de ce champ, par des points d'une simulation numérique ou des galaxies dans un catalogue. Alors $P(\delta)d\delta$ est la probabilité que la densité locale soit entre δ et $d\delta$.

Initialement on sait que cette distribution doit être gaussienne. La largeur de cette distribution dépend de l'amplitude et de la forme du spectre de puissance $P(k)$. Plus précisément,

$$\sigma^2(R) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(k) W^2(kR), \quad (200)$$

où R est l'échelle de filtrage et W est la fonction de filtrage dans l'espace des k .

Les résultats obtenus sur l'effondrement sphérique donnent une idée de ce qui peut se passer quand les non-linéarités commencent à jouer un rôle: l'effondrement

des régions surdenses est accélérés alors que les régions sous-denses se vident de moins en moins vite. La figure (15) donne une idée de ce qui en résulte: on s'attend à ce que les événements rares créent une asymétrie dans la distribution de densité locale. Le problème est que le collapse sphérique ne tient pas compte des couplages non-locaux. Il ne saurait donc a priori donné une image fiable de ce qui se passe. L'objet des calculs qui suivent est d'explorer aussi précisément que possible ces couplages et leurs conséquences.

6.1 Propriétés générales du développement perturbatif

Je commence par donner des propriétés générales du développement perturbatif en reprenant des résultats obtenus par Goroff et al. (1984). Le point de départ est le système d'équation décrivant la dynamique du fluide en espace Eulérien dans l'approximation à un seul fluide. C'est d'ailleurs une hypothèse fondamentale qu'on ne sait pas lever. Je me place dans un espace Einstein-de Sitter pour faciliter la présentation (on peut le faire dans toute sa généralité mais c'est plus laborieux).

Je rappelle qu'on a,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (201)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}, t) \quad (202)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2\psi(\mathbf{x}, t) - 4\pi G[\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)]a^2 = 0. \quad (203)$$

A partir de là je vais prendre la divergence de la deuxième équation et utiliser l'équation de Poisson pour éliminer le potentiel. On a,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (204)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\dot{a}}{a}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \\ & \frac{1}{a}\sum_{ij}\mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = -\frac{3}{2}\frac{\dot{a}^2}{a}\delta(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (205)$$

Enfin je vais introduire un nouveau gradient, $\nabla \equiv \frac{1}{aH}\nabla_{\mathbf{x}}$ et le champ Φ de telle manière³ que $\mathbf{u} = \nabla\Phi$. Enfin les dérivées par rapport au temps sont exprimées comme des dérivées par rapport à a . Notons qu'alors $\Delta\Phi(\mathbf{x})$ s'identifie avec θ qui est, on s'en souvient, une observable indépendante de la constante de Hubble. On obtient,

$$a\frac{\partial}{\partial a}\delta(\mathbf{x}) + (1 + \delta(\mathbf{x}))\Delta\Phi(\mathbf{x}) + \nabla\delta(\mathbf{x}) \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (206)$$

³la partie rotationnelle du champ de vitesse correspondant à un mode décroissant, le champ de vitesse qu'on regarde est a priori potentiel.

$$a \frac{\partial}{\partial a} \Delta \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \Delta \Phi(\mathbf{x}) + \nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Delta \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{ij} \Phi_{,ij}(\mathbf{x}) \Phi_{,ij}(\mathbf{x}) + \frac{3}{2} \delta(\mathbf{x}) = 0. \quad (207)$$

Si on écrit la densité (et la divergence) comme une série en fonction de la densité initiale,

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_n \delta^{(n)}(\mathbf{x}), \quad (208)$$

$$\theta(\mathbf{x}) = \sum_n \theta^{(n)}(\mathbf{x}), \quad (209)$$

et en introduisant les modes de Fourier de ce champ initial,

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (210)$$

alors on peut facilement montrer que,

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_1) \dots \frac{d^3 \mathbf{k}_n}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_n) a^n F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \quad (211)$$

$$\theta^{(n)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_1) \dots \frac{d^3 \mathbf{k}_n}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_n) a^n G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \quad (212)$$

Les fonctions F_n et G_n sont des fonctions sans dimensions, homogènes, des vecteurs d'onde \mathbf{k}_i . Il existe des lois de récursivité liant ces fonctions entre elles. Par exemple,

$$F_1 = 1 \quad (213)$$

$$G_1 = -1 \quad (214)$$

$$F_2 = \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \quad (215)$$

$$G_2 = - \left[\frac{3}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} + \frac{4}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right] \dots \quad (216)$$

Dans le cas d'un Univers qui n'est pas EdS, cette propriété n'est plus valable au sens stricte. Mais si dans l'équation précédente on remplace les facteurs d'expansion a par D_+ , les fonctions F_n qui en résultent ne dépendent que très faiblement du temps (et donc des paramètres cosmologiques). Les fonctions G_n sont essentiellement toutes proportionnelles à $f(\Omega)$.

La conséquence de ces propriétés est que les développements perturbatifs qui se font formellement par rapport à la densité initiale, sont en fait des développements par rapport à la solution *linéaire*.

6.2 Un exemple: le calcul de F_2 et G_2

A partir des équations couplées, on peut facilement écrire une relation récursive entre F_1 , G_1 , F_2 et G_2 . On a en effet,

$$2F_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + F_1(\mathbf{k}) G_1(\mathbf{k}') \left[1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2} \right] = 0 \quad (217)$$

$$\frac{3}{2}G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + G_1(\mathbf{k}) G_1(\mathbf{k}') \left[\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2} + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \right] + \frac{3}{2}F_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 0 \quad (218)$$

A partir de $F_1 = -G_1$ (qui s'obtient trivialement à partir de l'équation de continuité) on en déduit F_2 et G_2 . Ce calcul n'est valable que dans le cas Einstein-de Sitter. On voit facilement qu'on peut généraliser ce type d'approche à un ordre arbitraire. La dépendance avec les vecteur d'onde sera de plus en plus compliquée, mais fera toujours intervenir les 2 mêmes fonctions géométriques de base.

6.3 Effet du couplage de mode: la skewness

Une première conséquence de ce développement qu'il est facile de voir est l'apparition de couplages de mode. La densité à l'ordre 2 est une convolution des modes linéaires. D'un point de vue observationnelle il est intéressant d'en déduire des propriétés statistiques a priori observables et un moyen de mettre en évidence ces couplages de mode est d'examiner l'apparition de propriétés non-gaussiennes. Le premier moment non-trivial à apparaître est la skewness, moment d'ordre 3 de la densité.

On cherche donc à calculer $\langle \delta^3 \rangle$ et son terme dominant. On a

$$\langle \delta^3 \rangle = \langle (\delta^{(1)} + \delta^{(2)} + \dots)^3 \rangle. \quad (219)$$

Si on réordonne les termes qu'on obtient perturbativement on a,

$$\langle \delta^3 \rangle = \langle (\delta^{(1)})^3 \rangle + 3 \langle (\delta^{(1)})^2 \delta^{(2)} \rangle + \dots \quad (220)$$

Les termes suivants sont d'ordre plus grand en théorie des perturbations.

Le premier terme de ce développement est identiquement nul pour des conditions initiales gaussiennes. Le terme suivant est donc a priori le terme dominant pour cette quantité. On a donc,

$$\langle \delta^3 \rangle \approx 3 \langle (\delta^{(1)})^2 \delta^{(2)} \rangle \quad (221)$$

$$\begin{aligned} &= 3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} a \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} a \int \frac{d^3 \mathbf{k}_3}{(2\pi)^{3/2}} a \int \frac{d^3 \mathbf{k}_4}{(2\pi)^{3/2}} a \times \\ &\quad \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle F_2(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (222)$$

Pour des conditions initiales gaussiennes il faut associer les modes de Fourier par paires. Si on associe \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_3 ensembles on a 0 (à cause de F_2). Il reste deux termes qui donnent,

$$\begin{aligned} \langle \delta^3 \rangle &= 6 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_4}{(2\pi)^3} a^4 P(k_1) P(k_4) \times \\ &\quad \left(\frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_4^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)^2}{k_1^2 k_4^2} \right). \end{aligned} \quad (223)$$

En intégrant sur les angles entre \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_4 on obtient finalement (Peebles 1980),

$$\langle \delta^3 \rangle = \frac{34}{7} \langle \delta^2 \rangle^2. \quad (224)$$

On voit qu'il apparaît un nombre pur, $34/7$, et la tradition est de définir,

$$S_3 \equiv \frac{\langle \delta^3 \rangle}{\langle \delta^2 \rangle^2} = \frac{34}{7} + \mathcal{O}(\sigma^2). \quad (225)$$

Ce calcul cependant est académique parce que la densité a été prise ponctuellement. En pratique les champs sont filtrés (que ce soit observationnellement ou dans des expériences numériques). Il faut alors tenir compte de cet effet dans le calcul de S_3 . La difficulté du calcul tient dans la complexité qu'il y a à intégrer la partie angulaire des vecteurs d'onde. Pour avoir la skewness de la densité locale filtrée, δ_R , il faut en effet calculer,

$$\begin{aligned} \langle \delta_R^3 \rangle &= 6 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_4}{(2\pi)^3} a^4 P(k_1) P(k_4) W(k_1 R) W(k_4 R) \times \\ &\quad \left(\frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_4^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)^2}{k_1^2 k_4^2} \right) W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4| R) \end{aligned} \quad (226)$$

La fonction W est la fonction de filtrage dans l'espace des phases. Elle dépend évidemment de la procédure de filtrage utilisée. Il se trouve que le résultat final peut prendre une forme simple pour un filtrage top-hat dans l'espace réel. Dans ce cas là,

$$W(k) = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(k)}{k^{3/2}} = \frac{3}{k^3} [\sin(k) - k \cos(k)] \quad (227)$$

Pour cette fenêtre on a,

$$\int \frac{d\Omega_{12}}{4\pi} W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) \left[1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right] = \frac{2}{3} W(k_1) W(k_2) \quad (228)$$

$$\int \frac{d\Omega_{12}}{4\pi} W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) \left[1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} \right] = W(k_1) \left[W(k_2) + \frac{1}{3} k_2 W'(k_2) \right] \quad (229)$$

Ces propriétés s'obtiennent en utilisant le théorème de somme des fonctions de Bessel. On voit qu'on peut exprimer la fonction F_2 en utilisant les 2 expressions

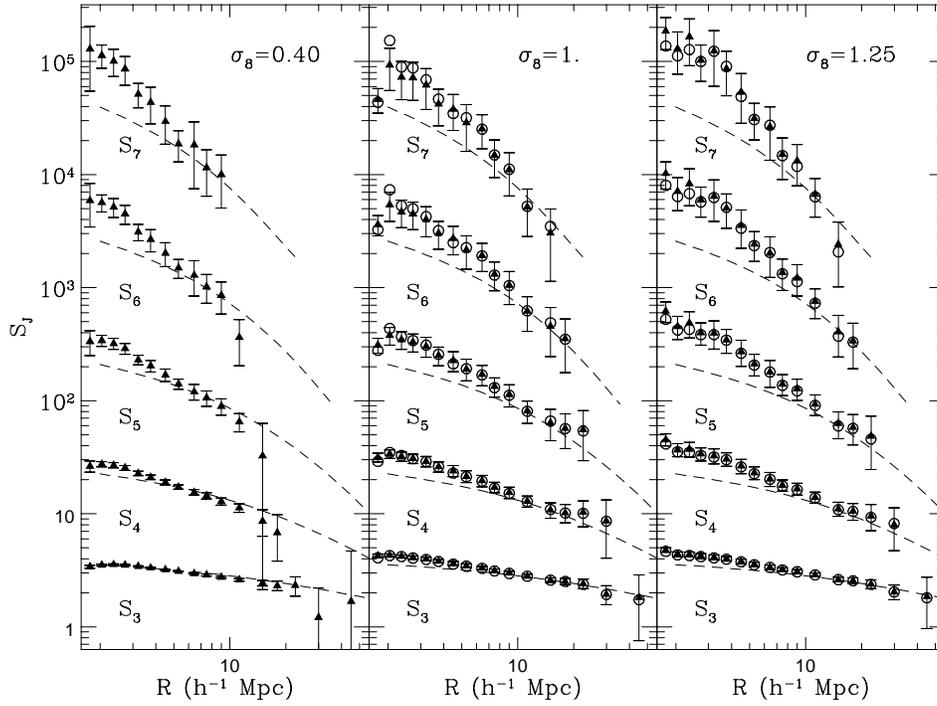


Figure 16: Les paramètres S_p pour $3 \leq p \leq 7$. Comparaison des prédictions théoriques (Bernardeau 1994c) avec les résultats de simulations numériques (Baugh et al. 1994)

polynomiales des relations précédentes. Finalement on obtient (Bernardeau 1994b),

$$S_3 = \frac{34}{7} + \frac{d \log \sigma^2(R)}{d \log R}. \quad (230)$$

Le résultat final va dépendre de la forme du spectre du puissance (essentiellement à l'échelle de filtrage). Pour un spectre en loi de puissance,

$$P(K) \propto k^n, \quad (231)$$

on a,

$$S_3 = \frac{34}{7} - (n + 3) \quad (232)$$

L'étude des amas de galaxies permet d'avoir des indications sur la valeur de n . On trouve des valeurs de l'ordre de $n \approx -1.5$. Les comparaisons avec les simulations numériques ont montré que ce résultat perturbatif sur S_3 était très robuste. Le domaine de validité de ce résultat est relativement grand comme on peut le voir sur la figure.

6.4 Dépendance avec les paramètres cosmologiques

Une question très intéressante qui se pose alors est de savoir si ce paramètre S_3 qui quantifie l'émergence de propriétés non-gaussiennes dépend des paramètres cosmologiques. Les calculs analytiques ont montré que la dépendance attendue était très faibles. En particulier Bouchet et al. 1992 ont obtenu,

$$S_3 = \frac{34}{7} + \frac{6}{7} (\Omega_0^{-0.03} - 1) - (n + 3). \quad (233)$$

Ce résultat est basé sur le fait que la densité au 2ème ordre s'écrit maintenant,

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}(\mathbf{x}) = & \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} D_+^2 \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}] \times \\ & \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{14} \Omega^{-2/63} + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{14} \Omega^{-2/63} \right) \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (234)$$

Ce résultat a été obtenu quand $\lambda = 0$. On trouve un résultat similaire quand $\lambda \neq 0$.

6.5 Interprétation, effet du filtrage

La skewness mesure la tendance du système à créer une distribution asymétrique avec des événements rares ayant un contraste de densité grand et positif (les proto-amas) et beaucoup d'événements de contraste de densité petit et négatif. Un moyen de quantifier cet effet est de considérer le développement de Edgeworth de la distribution de densité locale. Ce développement est valable pour des distributions proches d'une gaussienne (dans un sens qui sera préciser par la suite). Il s'écrit,

$$p(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \frac{S_3}{6} \sigma H_3\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \dots \right] \quad (235)$$

Ce développement utilise les polynômes de Hermite. Ici

$$H_3(\nu) = \nu^3 - 3\nu. \quad (236)$$

Sa forme générale peut être vue comme un développement formel (et par identification on peut relier les coefficients des termes du développement avec les moments, Juszkiewicz et al. 1995) ou à partir de la forme formelle de la distribution de densité locale obtenue comme transformée de Laplace inverse de la fonction génératrice des cumulants (Bernardeau & Kofman 1995).

Pour comprendre la dépendance de ce paramètre avec la forme du spectre il est très intéressant d'examiner en détail la nature du terme qui est rajouté avec les effets de filtrage.

Un bon moyen d'appréhender ce problème est de regarder ce qui se passe dans l'espace Lagrangien. En effet si on calcule $J^{(2)}$ on obtient,

$$J^{(2)} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} a^2 \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{q}] \times$$

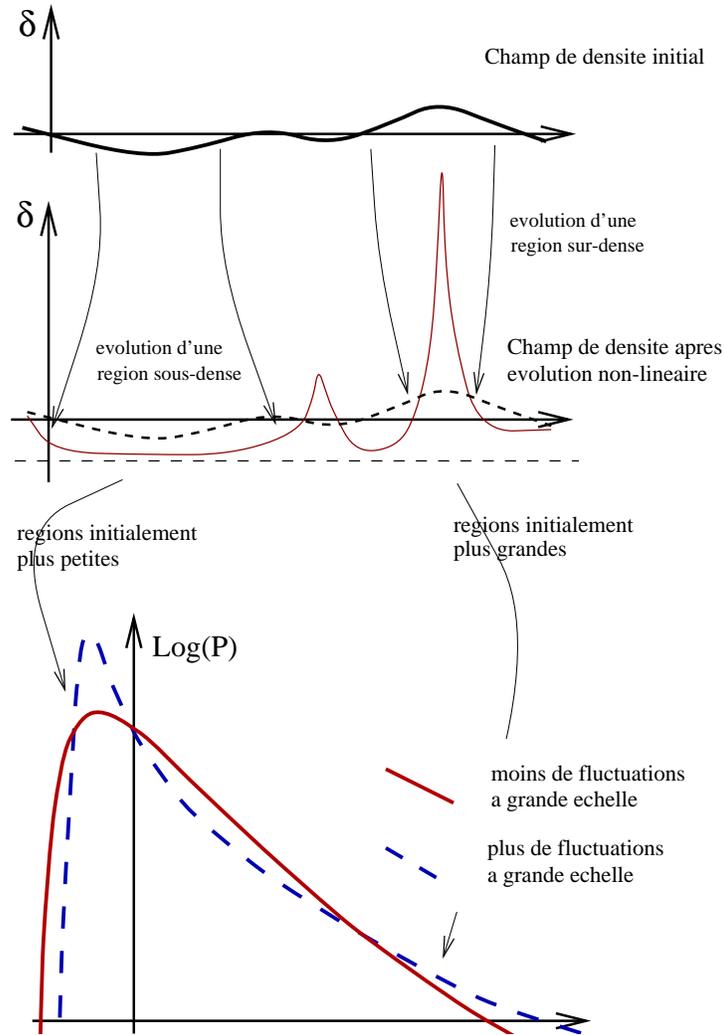


Figure 17: La skewness est une mesure de l'asymétrie de la distribution de densité locale. Elle émerge parce que les régions sous-denses évoluent moins vite que les régions sur-denses dès que les non-linéarités commencent à jouer un rôle. La dépendance de la skewness avec la forme du spectre vient de la correspondance entre l'espace Lagrangien qui donne la taille initiale de la perturbation et l'espace Eulérien qui est sensible à la taille finale. À une échelle de filtrage R donnée, les régions sur-denses proviennent de l'effondrement de régions qui étaient initialement plus grandes, alors que les régions sous-denses détectées viennent de régions initialement plus petites. Du coup si on part d'un spectre de puissance avec beaucoup plus de fluctuations à petite échelle qu'à grande échelle, on s'attend à ce que la skewness soit plus petite.

$$\frac{2}{7} \left[1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right], \quad (237)$$

ce qui donne pour la densité après que le Jacobien (c'est à dire le volume) ait été filtré à une échelle R donné,

$$\delta_R^{(2)} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} a^2 \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{q}] \times \left[W(k_1 R) W(k_2 R) - \frac{2}{7} W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| R) \left(1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right) \right]. \quad (238)$$

Il en résulte que le paramètre S_3 devient,

$$S_3^{\text{Lag.}} = \frac{34}{7}. \quad (239)$$

Le fait que l'on ne trouve pas le même résultat ne doit pas surprendre. Dans ce cas on vient de faire un filtrage à une échelle de *masse* donnée. La différence entre les 2 c'est qu'un objet de masse donnée a a priori une taille d'autant plus petite que cette masse était grande. Un filtrage à une échelle Eulérienne donnée mélange donc différentes échelles de masse initiales. Or pour un spectre hiérarchique les fluctuations de masse sont d'autant plus faibles que la masse est grande. On aura donc une asymétrie moins importante que celle qu'on aurait pu escompter.

7 La hiérarchie des corrélations en régime quasi-linéaire

Peut-on faire mieux que le calcul de S_3 ? Le calcul des fonctions homogènes F_n ou G_n est d'autant plus difficile que l'ordre est élevé, et les intégrales qu'il faut calculer deviennent elles aussi très fastidieuses. En pratique on ne peut guère aller au delà du moment d'ordre 4 par un calcul direct. Fry (1984) avait exploré ce cas mais sans prendre en compte les effets de filtrage. Bernardeau (1994b), Lokas et al. (1995) ont fait ces calculs directs pour S_4 dans le cas respectivement d'un filtre top-hat et d'un filtre Gaussien.

Formellement le cumulatif d'ordre 4 est donné par,

$$\begin{aligned} \langle \delta^4 \rangle_c &\equiv \langle \delta^4 \rangle - 3 \langle \delta^2 \rangle^2 \\ &= 12 \langle (\delta^{(1)})^2 (\delta^{(2)})^2 \rangle_c + 4 \langle (\delta^{(1)})^3 \delta^{(3)} \rangle_c. \end{aligned} \quad (240)$$

Dans ces équations le fait de prendre la partie connexe devient essentiel. Les termes supplémentaires qui apparaissent sont des corrections à la variance. Ils doivent donc être enlevés (ils s'annulent naturellement quand on fait la différence).

Une conséquence est que,

$$\langle \delta^4 \rangle_c \sim \langle \delta^2 \rangle^3, \quad (241)$$

et on peut définir S_4 par

$$S_4 \equiv \langle \delta^4 \rangle_c / \langle \delta^2 \rangle^3. \quad (242)$$

L'équation précédente permet de calculer la partie dominante de S_4 en régime quasi-linéaire. D'une manière générale on définit

$$S_n \equiv \langle \delta^n \rangle_c / \langle \delta^2 \rangle^{(n-1)}. \quad (243)$$

Toutes ces quantités sont finies à grande échelle pour des conditions initiales Gaussiennes. L'objet de cette section est d'en faire le calcul.

7.1 La fonction génératrice des cumulants de la densité locale

On peut déjà remarquer que

$$S_4 = 12 \nu_2^2 + 4 \nu_3, \quad (244)$$

avec

$$\nu_2 \equiv \langle \delta^{(2)} [\delta^{(1)}]^2 \rangle / \langle [\delta^{(1)}]^2 \rangle^2 \quad (245)$$

$$\nu_3 \equiv \langle \delta^{(3)} [\delta^{(1)}]^3 \rangle_c / \langle [\delta^{(1)}]^2 \rangle^3. \quad (246)$$

d'une manière générale tous les S_n peuvent s'exprimer en fonction des seuls quantités, ν_p , avec

$$\nu_p \equiv \langle \delta^{(p)} [\delta^{(1)}]^p \rangle_c / \langle [\delta^{(1)}]^2 \rangle^p. \quad (247)$$

Pour le voir on peut faire une représentation graphique des termes qui contribuent à S_n . Dans chaque $\delta^{(p)}$ il y a un produit de p variables aléatoires gaussiennes $\delta(\mathbf{k})$. Je vais représenter chacune de ces variables par des points. Quand on doit calculer une valeur moyenne, l'application du théorème de Wick fait que tous ces points doivent être associés par paires. Les quantités $\delta^{(p)}$ ressemblent donc à ce qui est représenté sur la figure 18.

Pour calculer S_n il faut calculer le terme dominant de la partie connexe de produits de la forme $\delta^{(p_1)} \dots \delta^{(p_n)}$. Pour que le terme calculé contribue à la partie connexe il faut que tous les facteurs soient liés par au moins une patte. Si ce n'est pas le cas on obtient un terme qui entre dans les termes correctifs au cumulants d'ordre inférieur. Par ailleurs comme on cherche le terme dominant

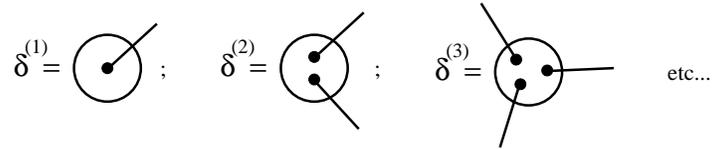


Figure 18: Représentation diagrammatique des δ_p . Chaque point représente un facteur $\delta(\mathbf{k})$.

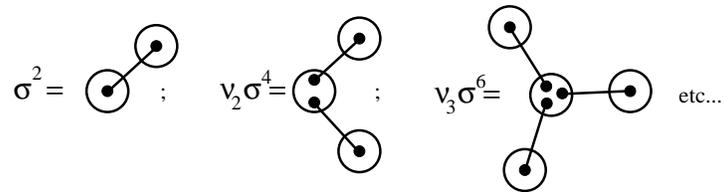


Figure 19: Expression des graphes les plus simples. Chaque ligne porte un facteur σ^2 , Les vertex obtenus par moyenne angulaire sur les vecteur d'onde portent ν_p .

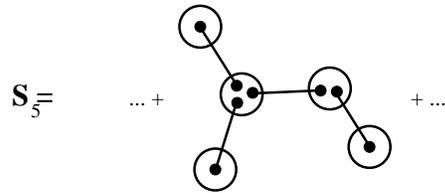


Figure 20: Un exemple de graphe contribuant à S_5 .

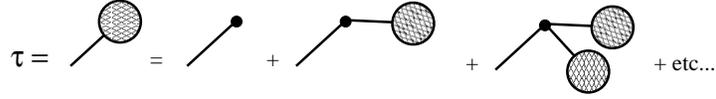


Figure 21: Représentaion graphique de la relation (252), τ est la fonction génératrice des diagrammes à une patte externe.

le nombre de lignes utilisées doit être minimal et le nombre de lignes nécessaire pour relier n points étant $n - 1$ on aura,

$$S_n = \sum_{\text{graphes, } \sum_i p_i=2(n-1)} \langle \delta^{(p_1)} \dots \delta^{(p_n)} \rangle_c / \langle [\delta^{(1)}]^2 \rangle^{n-1}. \quad (248)$$

Un exemple d'un tel graphes pour S_5 est donné sur la figure 20.

Il est utile de remarquer que tous ces diagrammes sont des arbres, qu'ils ne contiennent pas de boucles. On peut alors intégrer sur les vecteurs d'onde de proche en proche. Chaque ligne fait apparaître un facteur σ^2 et chaque vertex fait apparaître un facteur ν_p tel que je les ai définis précédemment. Graphiquement cela donne ce qui est représenté sur la figure 19.

Ce qu'on aimerait pouvoir calculer c'est l'ensemble des coefficients S_n , et donc plus spécifiquement leur fonction génératrice $\varphi(y)$,

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} -S_n \frac{(-y)^n}{n!}. \quad (249)$$

Si on définit la fonction génératrice des vertex $\mathcal{G}_\delta(\tau)$ par,

$$\mathcal{G}_\delta(\tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \nu_p \frac{(-\tau)^p}{p!}, \quad (250)$$

il est possible de montrer φ et \mathcal{G}_δ sont liés par le système,

$$\varphi(y) = y + y \mathcal{G}_\delta[\tau(y)] + \frac{1}{2} \tau^2(y), \quad (251)$$

$$\tau(y) = -y \mathcal{G}'_\delta[\tau(y)]. \quad (252)$$

Pour démontrer ce système de relations il faut faire intervenir les transformées de Legendre des fonctions génératrices. Ces techniques ont été développées initialement dans le domaine des polymères (voir Des Cloiseaux & Jannink 1987). Dans un contexte de cosmologie elles ont été employées par Schaeffer (1984) et présentées en détails par Bernardeau & Schaeffer (1992). S'il n'est pas possible de démontrer cette relation en quelques lignes on peut au moins se

convaincre de la validité de l'équation (252). En effet τ est la fonction génératrice des graphes à une patte externe. Sur la figure (21) on voit que τ doit être solution d'une équation implicite qui fait intervenir la fonction génératrice des vertex.

Finalement la difficulté technique est dans le calcul de la fonction génératrice des vertex $\mathcal{G}_\theta(\tau)$. Il faut avoir bien à l'esprit que les vertex ν_p sont simplement les moyennes géométriques des fonctions F_p . Pour faire les calculs je vais aussi avoir besoin des moyennes géométriques des fonction G_p que je note μ_p , soit,

$$\nu_p = \overline{F_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p)}^{\text{angles}} \quad (253)$$

$$\mu_p = \overline{G_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p)}^{\text{angles}} \quad (254)$$

et je défini $\mathcal{G}_\delta(\tau)$ la fonction génératrice des vertex μ_p . Pour obtenir \mathcal{G}_δ et \mathcal{G}_θ il faut partir des équations (206-207) et les ré-écrire dans l'espace de Fourier,

$$\begin{aligned} n F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + \sum_{p=1}^{n-1} F_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) G_{n-p}(\mathbf{k}_{p+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \times \\ \left[1 + \frac{(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i) \cdot (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)}{(\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)^2} \right] = 0 \quad (255) \\ \left(n + \frac{1}{2} \right) G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + \frac{3}{2} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + \\ \sum_{p=1}^{n-1} G_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) G_{n-p}(\mathbf{k}_{p+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \times \\ \left[\frac{(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i) \cdot (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)}{(\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)^2} + \frac{[(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i) \cdot (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)]^2}{(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i)^2 (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)^2} \right] = 0. \quad (256) \end{aligned}$$

Quand on prend les moyennes angulaires les produits scalaires simples tombent tandis que les produits carrés donnent 1/3. On obtient donc,

$$n \nu_n + \mu_n + \sum_{p=1}^n \nu_p \mu_{n-p} = 0; \quad (257)$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu_n + \frac{3}{2} \nu_n + \frac{1}{3} \sum_{p=1}^n \mu_p \mu_{n-p} = 0. \quad (258)$$

En termes de fonctions génératrices cela implique que,

$$\tau \frac{d}{d\tau} \mathcal{G}_\delta(\tau) + \mathcal{G}_\theta(\tau) [1 + \mathcal{G}_\delta(\tau)] = 0; \quad (259)$$

$$\tau \frac{d}{d\tau} \mathcal{G}_\theta(\tau) + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta(\tau) + \frac{3}{2} \mathcal{G}_\delta(\tau) + \frac{1}{3} \mathcal{G}_\theta^2(\tau) = 0. \quad (260)$$

On obtient un système d'équations différentielles couplées. Après quelques manipulations on peut montrer que l'équation d'évolution du $\mathcal{G}_\delta(\tau)$ se réduit à celle de l'effondrement sphérique où $\mathcal{G}_\delta(\tau)$ est le contraste de densité de la structure en effondrement et τ est la sur-densité linéaire. Dès lors il est facile de calculer les ν_n à un ordre arbitraire,

$$\nu_2 = \frac{34}{21}; \quad (261)$$

$$\nu_3 = \frac{682}{189}; \quad (262)$$

$$\nu_4 = \frac{446440}{43659}; \quad (263)$$

$$\dots \quad (264)$$

Les valeurs des S_n en découlent tout de suite,

$$S_3 = \frac{34}{7}; \quad (265)$$

$$S_4 = \frac{60\,712}{1\,323} \approx 45.89; \quad (266)$$

$$S_5 = \frac{200\,575\,880}{305\,613} \approx 656.3; \quad (267)$$

$$\dots \quad (268)$$

C'est intéressant mais il reste que ces résultats ne tiennent pas compte de l'effet de filtrage.

7.2 La fonction génératrice des cumulants de la densité filtrée

7.2.1 Propriétés géométriques dans l'espace Lagrangien

La quantité de base en espace Lagrangien est le Jacobien. Je peux toujours imaginer un développement perturbatif de J ,

$$J(\mathbf{q}) = J^{(1)}(\mathbf{q}) + J^{(2)}(\mathbf{q}) + \dots \quad (269)$$

A un ordre donné on aura,

$$J^{(p)}(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \dots \frac{d^3\mathbf{k}_p}{(2\pi)^{3/2}} a^p J_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_p)] \quad (270)$$

La propriété remarquable que l'on peut montrer est que (Bernardeau 1994c)

$$j_p \equiv \overline{J_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) W(|\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_p|R)^{\text{angles}}} \quad (271)$$

$$= \overline{J_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p)^{\text{angles}}} W(k_1 R) \dots W(k_p R). \quad (272)$$

La démonstration complète est assez ardue. Elle repose sur les remarques suivantes. Le Jacobien s'exprime essentiellement à partir de deux fonctions géométriques dans une construction récursive. En effet

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{q}) &\equiv \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right| \\
&= 1 + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi + \frac{1}{2} \left[(\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi)^2 - \sum_{ij} \Psi_{i,j} \Psi_{j,i} \right] \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[(\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi)^3 - 3 \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi \sum_{ij} \Psi_{i,j} \Psi_{j,i} + 2 \sum_{ijk} \Psi_{i,j} \Psi_{j,k} \Psi_{k,i} \right] \quad (273)
\end{aligned}$$

On a déjà vu que le filtre top-hat en quelque sorte commute avec $1 - (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 / k_1^2 / k_2^2$. On peut aussi montrer la propriété suivante,

$$\begin{aligned}
&\int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| R) \\
&\times \left[1 - \left(\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \right)^2 - \left(\frac{\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3}{k_2 k_3} \right)^2 - \left(\frac{\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1}{k_3 k_1} \right)^2 + 2 \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right] \\
&= (4\pi)^3 \frac{2}{9} W(k_1 R) W(k_2 R) W(k_3 R). \quad (274)
\end{aligned}$$

Là encore, tout se passe comme si on prenait le résultat obtenu pour le jacobien ponctuel calculé à partir du champ de densité initial tronqué.

Il est relativement facile de voir que la fonction J_p n'est construite récursivement qu'avec de telles fonctions géométriques. La propriété (272) s'obtient alors par applications successives de ces propriétés géométriques.

Ce qu'on vient d'obtenir généralise ce que l'on avait vu pour S_3 où en effet S_3 dans l'espace Lagrangien n'était pas affecté par le filtrage (pour un filtre top-hat en tout cas).

7.2.2 Le passage Lagrangien-Eulérien

L'idée est maintenant de trouver un truc pour récupérer le terme dominant des S_p à moindre frais à partir des S_p de l'espace Lagrangien.

La hiérarchie précédente me donne des informations sur la fonction génératrice des cumulants de la distribution de volume à échelle de masse fixe. On peut alors faire la remarque suivante: la probabilité qu'une masse M occupe un volume supérieur à V est aussi la probabilité qu'un volume V contienne une masse inférieure à M . Il suffit pour cela de considérer des sphères concentriques autour d'un point \mathbf{x}_0 donné⁴. Or une de ces probabilités s'exprime en espace Lagrangien, l'autre en espace Eulerien. À travers cette proposition on peut alors trouver le comportement dominant de la fonction génératrice des cumulants $\varphi(y)$ dans

⁴La proposition n'est cependant rigoureuse que pour des probabilités dites centrées

la limite des petites variances à partir de celle obtenue pour l'espace lagrangien qui s'identifie à celle obtenu sans tenir compte des effets de filtrage.

Rappelons d'abord que

$$p(\delta)d\delta = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i\sigma^2} \exp\left[-\frac{\varphi(y)}{\sigma^2} + \frac{y\delta}{\sigma^2}\right] d\delta. \quad (275)$$

Il est alors intéressant de faire un calcul succinct par la méthode du col qui est a priori valable dans la limite des petites variances. On voit que la position du point col est donnée par l'équation

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) = \delta, \quad (276)$$

et par ailleurs on a

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) = \mathcal{G}_\delta(\tau), \quad (277)$$

quand τ est toujours donnée par la même relation implicite avec y . Autour de ce point col la partie sous l'exponentielle est simplement donnée par

$$\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right). \quad (278)$$

La position du point col est donc essentiellement donnée par un simple changement de variable passant de la densité linéaire τ au contraste densité non-linéaire δ .

La différence entre une description Lagrangienne est que σ est pris dans un cas à une échelle de masse donnée, dans l'autre à une échelle physique R donnée. Comme je cherche la partie dominante de φ dans la limite $\sigma \rightarrow 0$ il est parfaitement légitime de s'appuyer sur cette approximation.

Pour rendre le calcul plus simple, je vais préciser un peu mes notations. Je note φ^L la fonction génératrice des cumulants dans l'espace Lagrangien et \mathcal{G}_δ^L la fonction génératrice des vertex. Dans l'espace Eulerien j'utilise l'exposant E . Il est toujours possible de supposer qu'il existe une fonction \mathcal{G}_δ^E associée à φ^E (même si il n'y a pas de représentation diagrammatique à partir de vertex qui lui soit associée). La variable τ est de même prise avec l'indice L ou E selon qu'elle concerne l'espace Lagrangien ou Eulerien.

Par identification des termes sous l'exponentielle (les seuls qui comptent dans la limite considérée), on a

$$-\frac{\tau_E^2}{2\sigma^2(R)} = -\frac{\tau_L^2}{2\sigma^2[(1+\delta)^{1/3}R]}. \quad (279)$$

Le contraste de densité est un paramètre donné a priori. Les variables τ_E et τ_L dépendent de δ à travers les équations du col,

$$\mathcal{G}_\delta^L(\tau_L) = \delta, \quad (280)$$

$$\mathcal{G}_\delta^E(\tau_E) = \delta. \quad (281)$$

Dans le cas Lagrangien σ (fonction de l'échelle à priori connue) est pris à l'échelle de masse correspondant à la surdensité δ considérée. La fonction $\mathcal{G}_\delta^L(\tau_L)$ est connue. C'est elle qui décrit la dynamique de l'effondrement sphérique.

À partir de ces équations je peux éliminer τ_L pour obtenir une équation implicite entre \mathcal{G}_δ^E et τ_E ,

$$\mathcal{G}_\delta^E(\tau_E) = \mathcal{G}_\delta^L\left(\frac{\sigma\left[\left(1 + \mathcal{G}_\delta^E(\tau_E)\right)^{1/3} R\right]}{\sigma(R)} \tau_E\right). \quad (282)$$

La fonction génératrice des cumulants $\varphi^E(y)$ est alors construite à partir de $\mathcal{G}_\delta^E(\tau_E)$ de la même manière que $\varphi^L(y)$ l'était à partir de $\mathcal{G}_\delta^L(\tau_L)$.

En développant cette fonction autour de $y = 0$ on a alors les expressions explicites des premières valeurs des S_p . Ils s'expriment en fonction des dérivées logarithmiques successives de la variance,

$$\gamma_p \equiv \frac{d^p \log \sigma^2(R)}{d \log^p R}, \quad (283)$$

et alors,

$$S_3 = \frac{34}{7} + \gamma_1, \quad (284)$$

$$S_4 = \frac{60712}{1323} + \frac{62}{3} \gamma_1 + \frac{7}{3} \gamma_1^2 + \frac{2}{3} \gamma_2, \quad (285)$$

$$S_5 = \frac{200575880}{305613} + \frac{1847200}{3969} \gamma_1 + \frac{6940}{63} \gamma_1^2 + \frac{235}{27} \gamma_1^3 \\ + \frac{1490}{63} \gamma_2 + \frac{50}{9} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{10}{27} \gamma_3, \quad (286)$$

$$S_6 = 12650 + 12330 \gamma_1 + 4512 \gamma_1^2 + 734.0 \gamma_1^3 + 44.81 \gamma_1^4 \\ + 775.8 \gamma_2 + 375.9 \gamma_1 \gamma_2 + 45.56 \gamma_1^2 \gamma_2 + 3.889 \gamma_2^2 \\ + 20.05 \gamma_3 + 4.815 \gamma_1 \gamma_3 + 0.1852 \gamma_4, \quad (287)$$

$$S_7 = 307810 + 383000 \gamma_1 + 190700 \gamma_1^2 + 47460 \gamma_1^3 \\ + 5914 \gamma_1^4 + 294.8 \gamma_1^5 + 27340 \gamma_2 + 20300 \gamma_1 \gamma_2 \\ + 5026 \gamma_1^2 \gamma_2 + 414.8 \gamma_1^3 \gamma_2 + 358.1 \gamma_2^2 + 88.15 \gamma_1 \gamma_2^2 \\ + 902.6 \gamma_3 + 443.3 \gamma_1 \gamma_3 + 54.44 \gamma_1^2 \gamma_3 + 7.778 \gamma_2 \gamma_3 \\ + 14.20 \gamma_4 + 3.457 \gamma_1 \gamma_4 + 0.08642 \gamma_5, \quad (288)$$

...

La figure (16) montre que ces coefficients sont en parfait accord avec des résultats de simulations numériques (ici pour un spectre CDM) dès lors que l'échelle de filtrage est plus grande que $10h^{-1}$ Mpc. Il est assez remarquable de voir que le domaine de validité de ces résultats ne se détériore pas quand on augmente l'ordre des cumulants.

Table 1: Valeur des paramètres de la singularité (293) pour différentes valeurs de l'indice spectral n .

n	δ_c	y_s	a_s	φ_s
-3	0.656	-0.184	1.84	-0.030
-2.5	0.804	-0.213	2.21	-0.041
-2	1.034	-0.253	2.81	-0.058
-1.5	1.44	-0.310	3.93	-0.093
-1	2.344	-0.401	6.68	-0.172
-0.5	5.632	-0.574	18.94	-0.434

7.3 Application, construction de la distribution de probabilité de densité locale

Je vais reprendre la relation entre la fonction de distribution de probabilité et la fonction génératrice $\varphi(y)$. Pour pouvoir utiliser cette relation il faut faire une hypothèse supplémentaire non triviale. En effet $\varphi(y)$ est a priori une fonction de σ à travers la dépendance des S_p avec σ . Je vais alors supposer que la limite,

$$\varphi(y, \sigma) \rightarrow \varphi(y) \text{ quand } \sigma \rightarrow 0, \quad (289)$$

est uniforme. Il n'y a pas de preuve de cette propriété, cependant elle est fortement suggérée par les résultats numériques sur les S_p .

Quand la variance est suffisamment faible il est alors légitime de supposer que

$$p(\delta)d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi i\sigma^2} \exp\left[-\frac{\varphi(y)}{\sigma^2} + \frac{y\delta}{\sigma^2}\right] d\delta. \quad (290)$$

Je vais maintenant considérer sérieusement cette équation et rechercher les différentes formes de $p(\delta)$ qui en résultent (voir Balian & Schaeffer 1989 pour une description plus exhaustive des résultats). Profitant de l'approximation $\sigma \ll 0$ on peut appliquer la méthode du col, et on obtient

$$p(\delta)d\delta = \frac{d\delta}{-\mathcal{G}'_\delta(\tau)} \left[\frac{1 - \tau\mathcal{G}''_\delta(\tau)/\mathcal{G}'_\delta(\tau)}{2\pi\sigma^2} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right), \quad (291)$$

$$\mathcal{G}_\delta(\tau) = \delta. \quad (292)$$

Cette solution est valable quand $\delta \leq \delta_c$ où δ_c est la valeur du contraste de densité qui annule $1 - \tau\mathcal{G}''_\delta(\tau)/\mathcal{G}'_\delta(\tau)$. Quand δ est plus grand que δ_c on ne peut plus faire l'approximation du point col. La forme de $p(\delta)$ est alors plutôt déterminée par le comportement de $\varphi(y)$ près de sa singularité,

$$\varphi(y) - \varphi_s \simeq -a_s(y - y_s)^{3/2}, \quad (293)$$

et on a

$$p(\delta)d\delta = \frac{3a_s\sigma}{4\sqrt{\pi}}(1 + \delta)^{-5/2} \exp[-|y_s|\delta/\sigma^2 + |\varphi_s|/\sigma^2] d\delta. \quad (294)$$

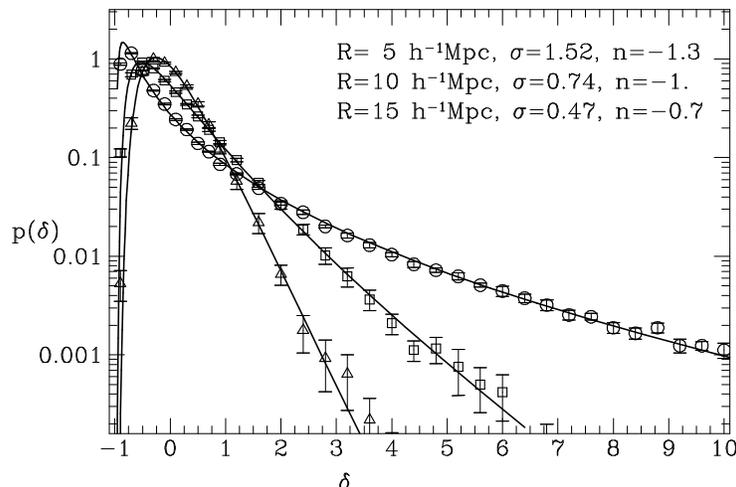


Figure 22: Comparaisons des résultats de simulations numériques N corps avec les prédictions de la théorie perturbative.

On voit que la forme du cut-off est très différente d'une forme gaussienne. Il faut bien avoir à l'esprit que ce résultat repose en grande partie sur l'hypothèse (289), et en particulier que la position de la singularité doit rester à une distance finie de l'origine quand σ est finie. La table (1) donne les paramètres de la singularité pour différentes valeurs de l'indice spectral. Je rappelle que $n \approx -1.5$ est une valeur suggérée par les comptages d'amas.

Numériquement il est toujours possible d'intégrer sans faire explicitement l'approximation du col. Les formes obtenues sont en bon accord avec les résultats de simulations numériques N -corps. Sur la figure (22) on a des fonctions de distribution pour différentes échelles de filtrage, donnant différentes valeurs de la variance. La forme prédite pour la distribution (calculée à partir de la donnée de la variance et de l'indice spectral local) est en remarquable accord avec les résultats numériques.

7.4 Les termes sous-dominants du développement perturbatif

Les quantités que l'on vient de calculer sont les termes dominants (contributions en arbre) d'un développement plus général. On peut toujours se demander si les corrections en boucles permettent d'étendre le domaine de validité de la théorie des perturbations. Par exemple pour les termes correctifs à la variance on a deux diagrammes supplémentaires (voir figure 23), pour la skewness on en a quatre (figure 24).

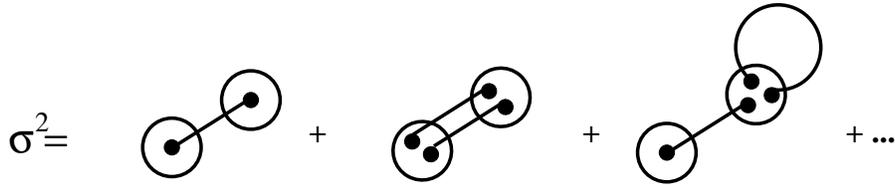


Figure 23: Diagrammes à une boucle contribuant à la variance

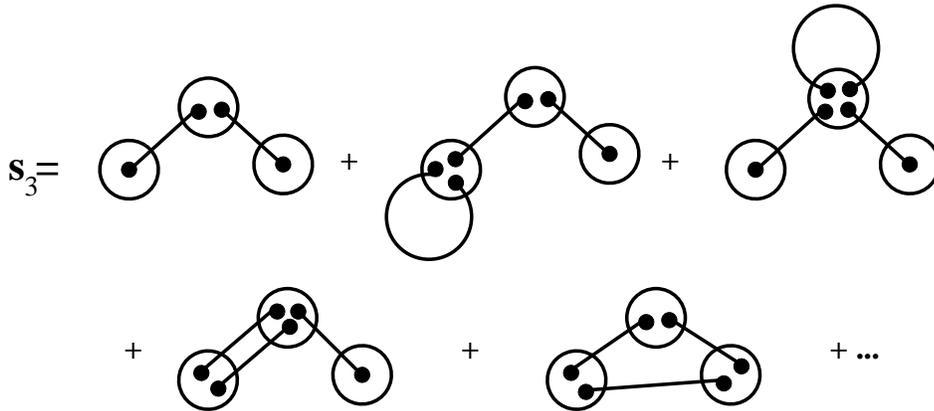


Figure 24: Diagrammes à une boucle contribuant à S_3 .

C'est un domaine qui a été relativement peu exploré. On sait donc peu de chose sur ces termes correctifs. La raison principale en est sans doute que les calculs sont horriblement compliqués. On ne peut plus simplement moyennner sur les angles, et les effets de filtrage rendent les calculs encore plus inextricables.

Les résultats obtenus sur la variance et la skewness montrent que (Scoccimarro & Frieman 1996, Scoccimarro 1997, Scoccimarro et al. 1998)

- Les termes correctifs ne convergent que si l'indice spectral n est compris entre -3 et -1. A grande échelle ça ne converge donc pas. Ce sont les 'petites boucles' qui induisent ces divergences.
- Quand on a convergence, on a une bonne description de la transition vers le nonlinéaire (voir figure 25).

En pratique on a un cut-off naturel parce que $n \rightarrow -3$ à petite échelle. Il n'en reste pas moins qu'on ne sait pas si ce cut-off doit être explicitement introduit pour régulariser les résultats ou si une resommation (au moins partielle) des boucles donnerait une contribution finie (mais éventuellement avec une autre dépendance en σ).

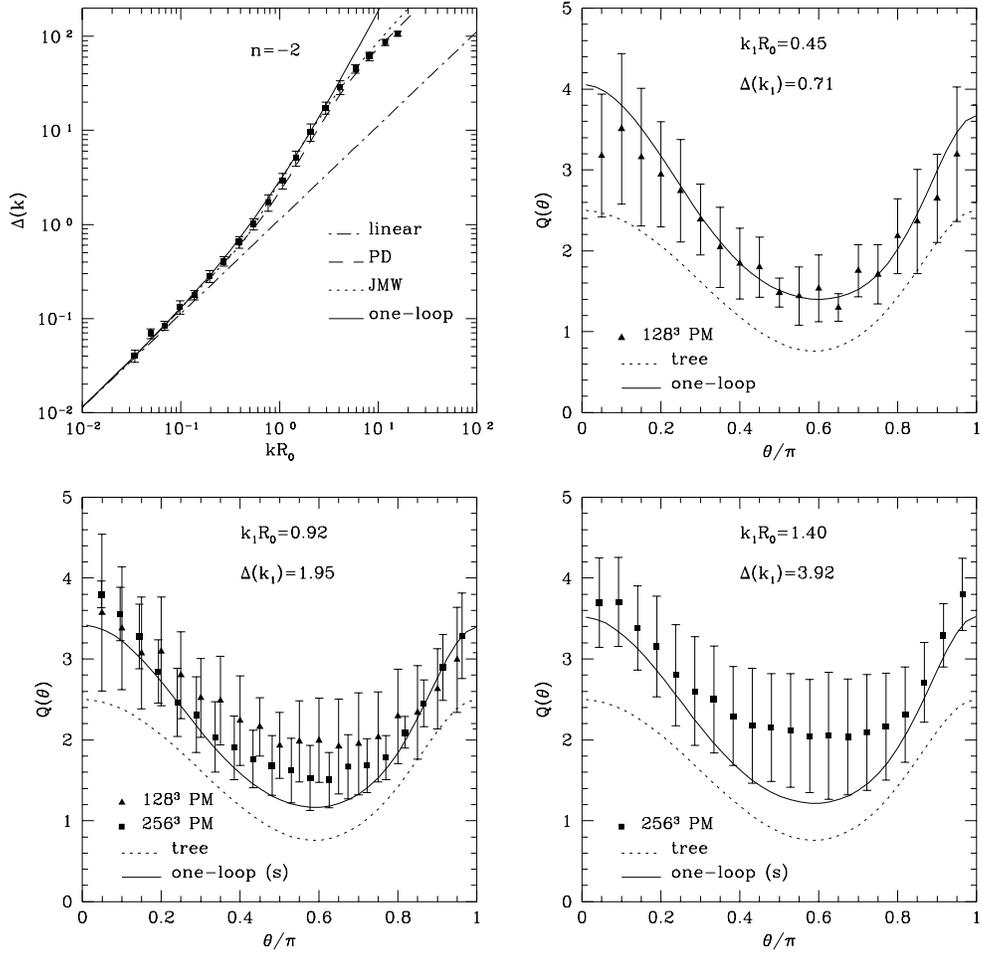


Figure 25: Résultats de la théorie des perturbations à une boucle pour la variance et le bi-spectrum pour le cas $n = -2$. On voit que les termes en boucles reproduisent correctement les résultats numériques. (figure extraite de Scoccamarro et al. 98)

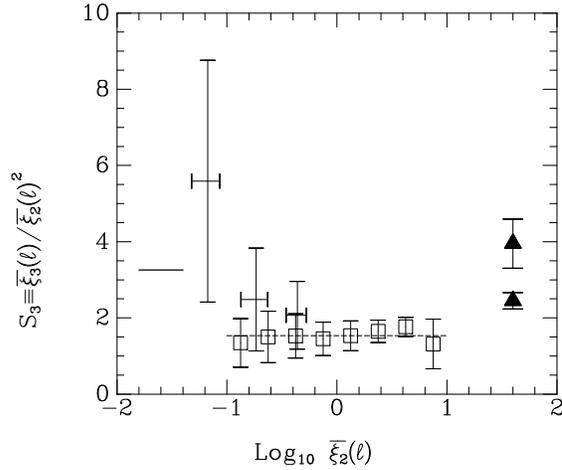


Figure 26: La skewness mesurée dans le catalogue IRAS (carrés) comparée à des mesures faites pour les galaxies optiques (triangles). La ligne continue à gauche est la prédiction de la théorie des perturbations (figure extraite de Bouchet et al. 1993).

8 Application aux propriétés statistiques de quantités observables

Dans cette partie je vais illustrer les résultats des théories des perturbations sur des quantités observables, catalogues de galaxies tri-dimensionnel ou bi-dimensionnel, champ de distorsion gravitationnelle.

8.1 Les catalogues de galaxies

A priori on peut toujours supposer que les fluctuations du nombre local de galaxies sont une mesure des fluctuations de densité cosmique. En général on suppose que les galaxies forment une représentation discrète résultant d'un processus Poissonnien d'un champ de densité continu sous-jacent. (Ce qui revient à dire que les mesures sont affectées d'un bruit Poissonnien).

Dans les catalogues tri-dimensionnels il faut tenir compte d'un effet ignoré jusqu'à présent qui est dû au fait que les positions des galaxies sont estimées à partir de la vitesse de recession qui combine la distance réelle (mouvement de Hubble) et la vitesse propre le long de la ligne de visée. C'est ce qu'on appelle la position dans l'espace des redshifts. Il faut en principe en tenir compte dans le calcul des S_p . Hivon et al. (1995) ont montré que cette correction ne changeait que très peu la valeur de S_3 à grande échelle (enfin tant qu'on peut négliger les 'doigts de Dieu', voir figure 27).

Des mesures de ces paramètres ont été faites dans tous les grands catalogues de galaxies à notre disposition par Bouchet et al. (1992, 1993 pour le survey

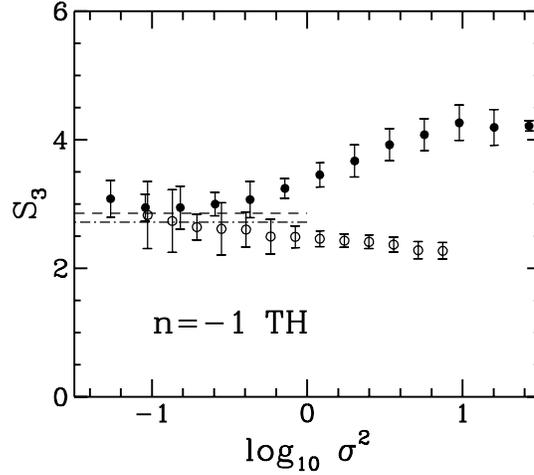


Figure 27: La skewness calculée dans l'espace réelle (ligne pointillée) et calculée dans l'espace des redshifts (ligne continue). Ces prédictions sont comparées à des résultats de simulations numériques, espace réel (symboles pleins) espace des redshift (symboles vides). La cas présenté est $n = -1$ pour un filtre top-hat (figure extraite de Hivon et al. 1995).

de galaxies infrarouges IRAS), Gaztañaga (1992, 1993, et 1994 pour les surveys optiques CfA, SSRS et APM).

Toutes ces mesures montrent que les comportements hiérarchiques attendus sont bien vérifiés. C'est en soit un résultat extrêmement important. Cela implique que les conditions initiales pour la formation des grandes structures étaient sinon Gaussiennes du moins proche d'être Gaussiennes. Par exemple les données excluent a priori les modèles de textures (Gaztañaga & Mähönen 1996, voir figure 28). En effet on s'attend à ce que la hiérarchie soit préservée même si les galaxies sont biaisées. (du moins tant que les interactions non-gravitationnelles ayant donné naissance aux galaxies sont locales).

Toutefois les valeurs des S_p mesurés ne sont pas en accord avec les prédictions théoriques. C'est à ce niveau là que se pose le problème des biais. c'est à ce jour l'interprétation la plus raisonnable pour expliquer les différences persistantes qui subsistent.

8.2 Les catalogues bi-dimensionnels

Les données les plus riches actuellement sont dans les catalogues angulaires. Ils donnent la position angulaire sur la voûte céleste de plus d'un million d'objets. De ce fait il est possible de mesurer les paramètres s_p jusqu'à de très grands ordres (voir figure 29).

On peut tout aussi bien se poser la question du calcul des probabilités de comptages dans ce type de catalogues. Cela correspond à un filtrage qui n'est

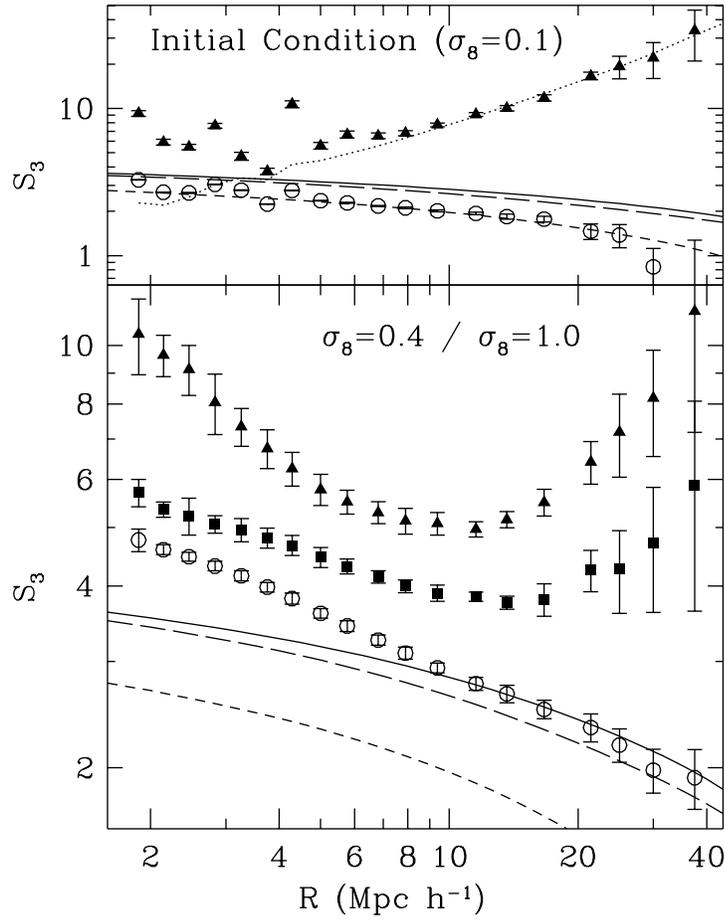


Figure 28: La skewness pour des modèles à conditions initiales Gaussiennes (symboles vides) comparé à des modèles avec conditions initiales non-Gaussiennes de type textures (symboles pleins) pour différentes valeurs de la variance. Figure extraite de Gaztañaga & Mähönen (1996).

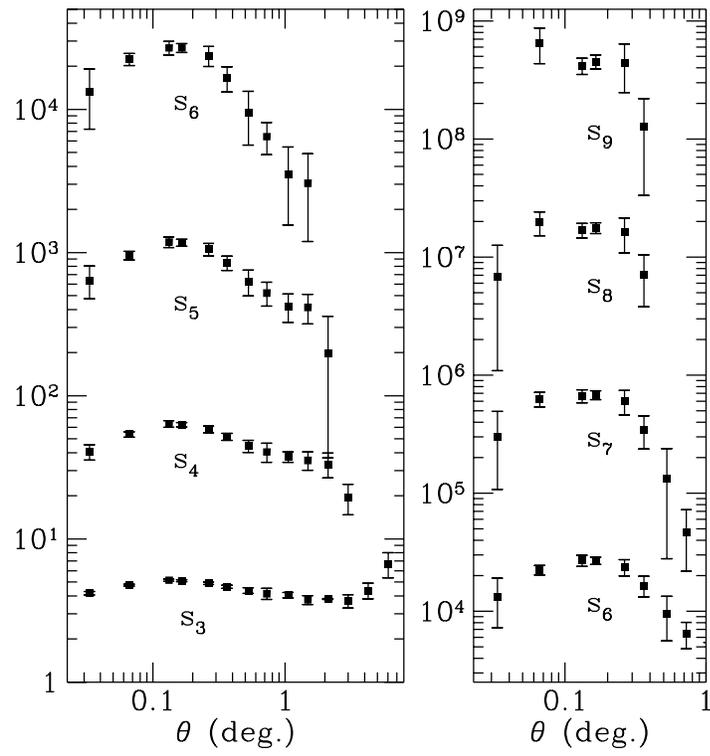


Figure 29: Les paramètres s_p mesurés dans le catalogue angulaire APM (Gaztañaga 1993).

plus à symétrie sphérique: la fenêtre de filtrage a maintenant la forme d'un cône dans l'espace réel. Plus précisément la densité projetée $w(\gamma)$ dans la direction γ vaut,

$$w(\gamma) = \int_0^\infty r^2 dr F(r) \bar{\rho} (1 + \delta(r, \gamma)), \quad (295)$$

et la densité filtrée à une échelle angulaire θ est

$$w_\theta(\gamma) = \int_{|\gamma'| < \theta} d^2 \gamma' \int_0^\infty r^2 dr F(r) \bar{\rho} (1 + \delta(r, \gamma + \gamma')). \quad (296)$$

La fonction F est directement liée au processus de sélection des galaxies du catalogues (limite en magnitude, etc.). Typiquement pour des sélections en magnitude apparente en luminosité optique on a,

$$F(r) \sim \frac{1}{r^{0.5}} \exp(-r^2/D^2), \quad (297)$$

où D est la profondeur du catalogue. Notons que jusqu'à présent les catalogues sont peu profonds d'un point de vue cosmologique et donc on peut supposer que la distance lumineuse est une simple distance Euclidienne. On peut toujours normaliser F de telle manière que

$$\int_0^\infty r^2 dr F(r) \bar{\rho} = 1. \quad (298)$$

Je cherche maintenant à exprimer les différents moments de la fonction de probabilité de densité angulaire locale. La fonction de corrélation à deux points est donnée par,

$$\begin{aligned} \langle w(\gamma_1) w(\gamma_2) \rangle &= \int r_1^2 dr_1 F(r_1) \int r_2^2 dr_2 F(r_2) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(k) \times \\ &\quad \exp [ik_r(r_1 - r_2) + i\mathbf{k}_\perp \cdot (r_1 \gamma_1 - r_2 \gamma_2)], \end{aligned} \quad (299)$$

où \mathbf{k} est décomposé en sa partie radiale k_r et sa partie ortho-radiale \mathbf{k}_\perp . L'approximation des petits angles consiste à remarquer que la distance angulaire $|\gamma_1 - \gamma_2|$ est faible alors k_r va être très petit devant la norme de \mathbf{k}_\perp , du coup,

$$P(k) \approx P(k_\perp). \quad (300)$$

Il en résulte que

$$\langle w(\gamma_1) w(\gamma_2) \rangle = \int r^4 dr F^2(r) \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) \exp [i\mathbf{k}_\perp \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)r]. \quad (301)$$

En effet l'intégrale sur k_r introduit une fonction delta en $r_1 - r_2$. L'approximation des petits angles signifie simplement que les paires qui contribuent le plus à la

variance de la densité projetée viennent de points qui étaient à la même distance de l'observateur. Ce résultat correspond à l'approximation dite de Limber (1954) sur la fonction de corrélation angulaire. Cette approximation n'est d'ailleurs valable que si la fonction de corrélation est suffisamment pentue.

Pour avoir la variance de la densité filtrée, il suffit de prendre la TF de la fenêtre donc, dans l'espace de Fourier, multiplier par la fenêtre⁵ $W(k)$ et on obtient,

$$\langle w_\theta^2 \rangle = \int r^4 dr F^2(r) \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) W^2(k\theta r). \quad (302)$$

Le calculs de la skewness peut se faire de manière similaire et on peut utiliser pour un filtrage angulaire top-hat de propriétés similaires à celles utilisées pour le cas 3D.

Il en résulte que,

$$s_3 = \frac{\int r^6 dr F^3(r) \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) W^2(k\theta r)}{\left[\int r^4 dr F^2(r) \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) W^2(k\theta r) \right]^2} \times \left[\frac{36}{7} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k') W^2(k'\theta r) + \frac{3}{2} \frac{d}{\log \theta} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k') W^2(k'\theta r) \right] \quad (303)$$

Cette expression se simplifie quelque peu quand on suppose qu'on a une loi de puissance pour le spectre $P(k)$ ($P(k) \sim k^n$),

$$s_3 = \frac{\int r^6 dr F^3(r) r^{-2(n+2)}}{\left[\int r^4 dr F^2(r) r^{-(n+2)} \right]^2} \left[\frac{36}{7} - \frac{3}{2}(n+2) \right]. \quad (304)$$

La hiérarchie complète des s_p se calcule de manière analogue au cas 3D. On a simplement en plus un facteur géométrique lié aux effets de projection. Les coefficients purement dynamiques sont en fait identiques à ceux qu'on aurait obtenus si on était parti d'une dynamique bidimensionnelle.

Encore une fois, les comparaisons avec les catalogues de galaxies montrent un désaccord avec les prédictions de la théorie des perturbations, probablement dû aux effets de biais.

8.3 Les effets de lentille gravitationnelle

Une motivation pour aller chercher de nouveaux traceurs du champ de densité est justement de s'affranchir des effets de biais. Un moyen de tracer les champs de densité locaux est d'utiliser les effets de distorsion gravitationnelle. Pour une description général de ces effets voir Sachs (1961) et Schneider, Ehlers & Falco (1992).

⁵A deux dimensions la fenêtre top-hat de l'espace réel s'écrit en espace de Fourier, $W(k) = 2J_1(k)/k$

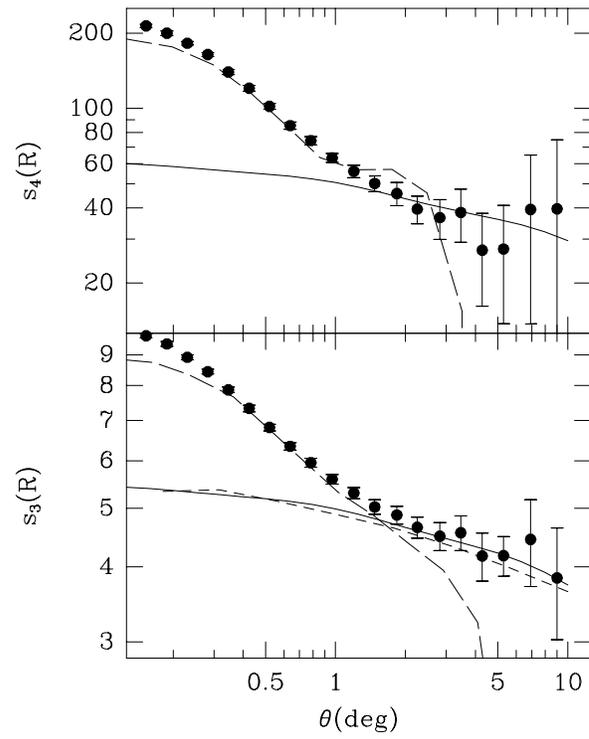


Figure 30: Les paramètres s_3 et s_4 obtenus par la théorie des perturbations (lignes continues) comparés à des résultats de simulations numériques (Gaztañaga & Bernardeau 1998).

8.3.1 Les lentilles gravitationnelles

Je vais commencer par rappeler des concepts simples des effets de lentilles. Une lentille induit une déflexion $\partial\alpha$ des rayons lumineux par unité de distance ∂s égale à,

$$\partial\alpha/\partial s = -2\nabla_{\perp}\phi \quad (305)$$

où ϕ est le potentiel de la lentille et le gradient est pris dans le plan orthogonal à la trajectoire des photons. Quand on regarde des objets lointains ces déflexions induisent des déplacements des positions apparentes des objets d'arrière plan. Le déplacement apparent dépend des différentes longueurs qui interviennent dans le banc optique. Il en résulte que la position apparente d'un objet γ^I (dans le plan dit image) est liée à sa position réelle dans le plan source γ^S par,

$$\gamma^I = \gamma^S + \xi(\gamma^I) \quad (306)$$

avec

$$\xi(\gamma^I) = -2\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}\nabla_{\gamma}\Phi. \quad (307)$$

où D_{LS} , D_{OS} et D_{OL} sont respectivement les distances angulaires entre la lentille et les sources, l'observateur et les sources et l'observateur et la lentille. D'autre part $\nabla_{\gamma}\phi$ est la dérivée angulaire du potentiel projeté Φ .

Cependant le champ de déplacement n'est pas une observable directe (sauf dans les cas d'images multiples). Un objet (faiblement) étendu comme une galaxie va être non seulement déplacé mais aussi déformé. La matrice de déformation est donnée par la matrice 2x2 des dérivées secondes du champ de déplacement,

$$\mathcal{A} \equiv \xi_{i,j} = \delta_{ij} - 2\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}\Phi_{,ij}. \quad (308)$$

On voit que la matrice \mathcal{A} est une matrice symétrique. On l'écrit en général,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (309)$$

La trace de la matrice donne la convergence κ , les autres composantes donnent le cisaillement. On va avoir des lignes critiques (et des images multiples) quand $\kappa \rightarrow 1$.

8.3.2 Les observables

Pour chaque galaxie on peut calculer une matrice de forme, \mathcal{S} , à partir de la distribution de lumière de cette galaxie. Plus précisément on définit,

$$\mathcal{S} = \frac{\int d^2\theta \theta_i \theta_j \mathcal{I}(\theta)}{\int d^2\theta \theta^2 \mathcal{I}(\theta)/2} \quad (310)$$

En se souvenant que la densité de luminosité d'un objet n'est pas affectée par les effets de lentille on peut relier la matrice de forme d'une galaxie d'arrière-plan telle qu'elle peut être mesurée dans le plan Image \mathcal{S}^I à celle qu'on aurait obtenue en l'absence de lentilles,

$$\mathcal{S}^S = \frac{\mathcal{A} \cdot \mathcal{S}^I \cdot \mathcal{A}}{\det(\mathcal{A})}. \quad (311)$$

Chaque galaxie d'arrière plan permet donc une estimation de la matrice de distorsion, mais normalisée de telle sorte que son déterminant vaut 1. Du coup les matrices de forme donnent accès aux quantités suivantes,

$$\mathbf{g} = \frac{\gamma}{1 - \kappa}. \quad (312)$$

Cependant une galaxie d'arrière plan seule ne permet pas de faire une mesure (sauf cas d'arcs critiques ou quasi-critiques). Il faut moyenner un certain nombre de galaxies d'arrière-plan en supposant que les ellipticités intrinsèques des galaxies sont distribuées de manière aléatoire et indépendante.

8.3.3 La précision des mesures possibles

Le bruit intrinsèque des mesures est un bruit de type Poissonien qui dépend de l'ellipticité intrinsèque des galaxies d'arrière-plan, donc

$$Bruit \approx \frac{0.3}{\sqrt{N_g}} \quad (313)$$

Typiquement on détecte environ 50 gal/arcmin². À une échelle de l'ordre de 10 arcmin on a donc un bruit de mesure intrinsèque de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$. Autrement dit on est en mesure de détecter des signaux cosmologiques à cette échelle dès qu'ils atteignent l'ordre du %.

Un amas de galaxies génère des effets de l'ordre de quelques % à sa périphérie. Les effets de distorsion qu'il induit, même en dehors des régions critique, sont donc parfaitement détectables. En fait même les grandes structures de l'Univers en générale sont parfaitement détectables comme l'ont démontré Blandford et al. (1991), Miralda-Escudé (1991), Kaiser (1992) et comme on va le voir dans la suite.

8.3.4 la relation entre cisaillement et convergence

En tirant profit du fait que les éléments de la matrice \mathcal{A} sont des dérivées secondes d'un même champ scalaire ϕ on peut trouver une relation non-locale entre la convergence locale et le champ de distorsion. Cette relation explicitée par Kaiser (1995) s'écrit,

$$\nabla \log(1 - \kappa) = \begin{pmatrix} 1 - g_1 & g_2 \\ g_2 & 1 + g_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (314)$$

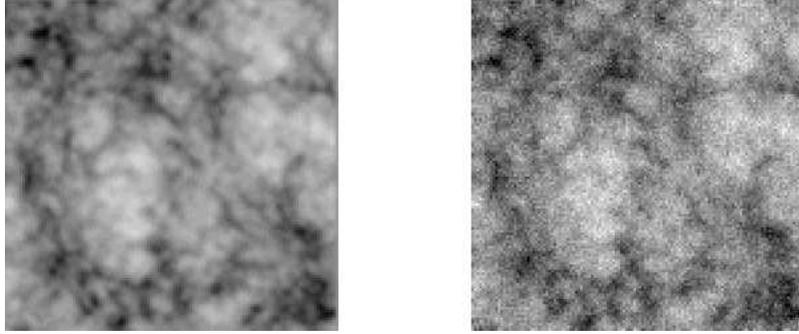


Figure 31: Exemple de reconstruction de carte de convergence. La carte de gauche est une carte simulée de 5x5 degrés. La carte de droite est la carte reconstruite en introduisant du bruit de mesure pour chaque pixel. On voit à petite échelle le bruit Poissonien des mesures mais à grande échelle on retrouve bien les grandes structures (figure extraite de Van Waerbeke et al. 1998).

De cette relation il résulte que le champ de convergence locale est a priori observable. En fait, en pratique on ne fait pas une intégration directe de cette relation mais on recherche le potentiel ϕ qui reproduit au mieux le champ de distorsion mesuré en minimisant un χ^2 . La figure (31) donne un exemple d'une telle reconstruction.

8.3.5 Variance et skewness de la convergence locale

Dans un contexte cosmologique la convergence locale est donnée par l'ensemble des concentrations de masse sur les lignes de visée. Ainsi κ dans la direction γ est donnée par (dans le cas d'une lentille mince ou par linéarisation),

$$\kappa(\gamma) = -\frac{3}{2}\Omega_0 \int dz_s n(z_s) \int d\chi \frac{D(z, z_s)D(z)}{D(z_s)} \delta_{\text{masse}}(\chi, \gamma) (1 + z(\chi)) \quad (315)$$

où z_s est le redshift des sources, et $n(z_s)$ leur distribution en redshift (normalisée à l'unité), χ est la distance radiale et D les distances angulaires qui interviennent (exprimées en unités c/H_0). En général les distances cosmologiques qui interviennent sont différentes, sauf dans le cas d'une section spatiale plane.

On voit que la convergence locale est formellement très similaire à la densité projetée dans un catalogue angulaire. La différence est que la fonction de sélection n'est pas ici normalisée. En utilisant l'approximation des petits angles on peut calculer les premiers moments de cette distribution.

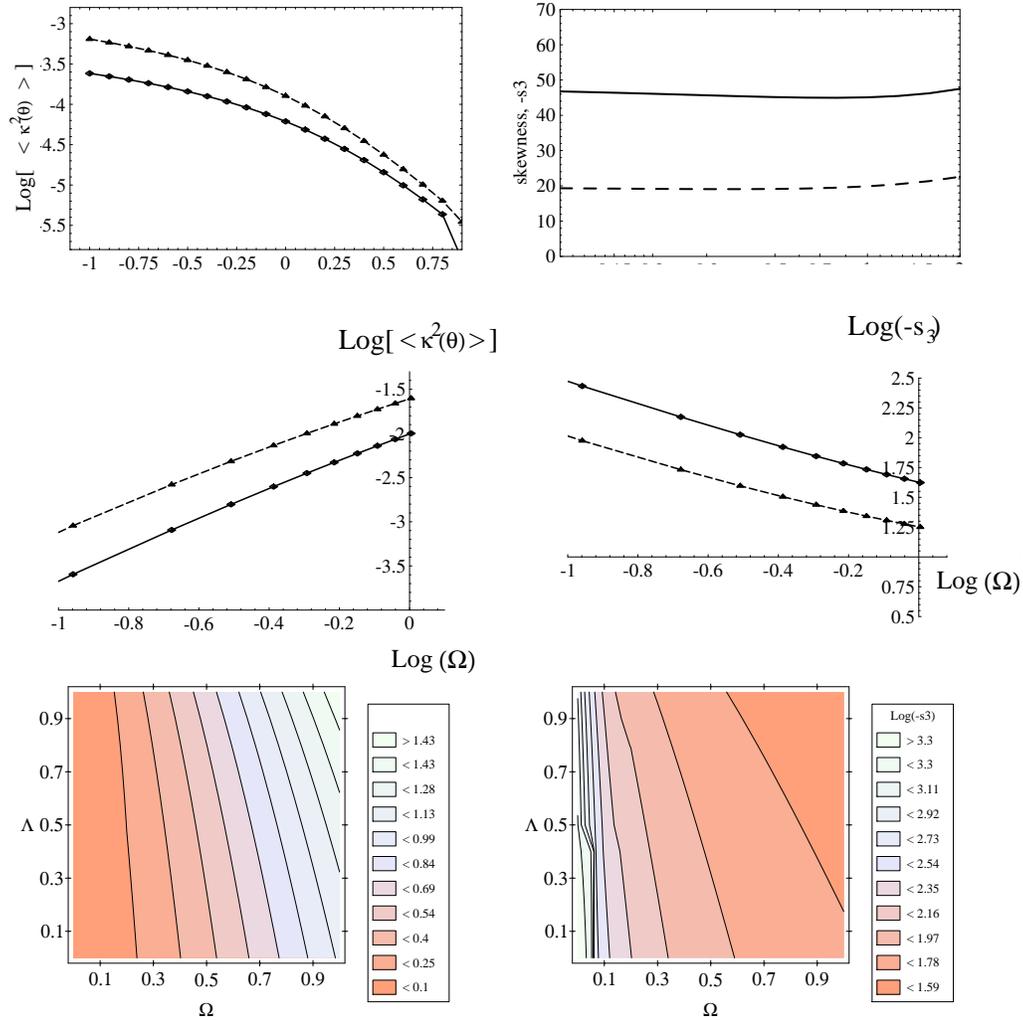


Figure 32: La variance (panneaux de gauche) et la skewness (panneaux de droite) de la convergence locale. En haut est donnée la dépendance avec l'échelle angulaire pour deux populations différentes de sources ($z_s = 1$, lignes continues), ($z_s = 2$, lignes pointillées). Au centre est représentée la dépendance avec Ω_0 et en bas la dépendance conjointe avec Ω_0 et Λ_0 pour une population de sources à $z_s = 1$ (figures extraites de Bernardeau et al. 1997).

On trouve que (Bernardeau, van Waerbeke & Mellier 1997)

$$\langle \kappa_\theta^2 \rangle^{0.5} \approx 0.01 \sigma_8 \Omega_0^{0.75} z_s^{0.75} \left(\frac{\theta}{1 \text{ deg}} \right)^{-(n+2)/2}, \quad (316)$$

et

$$s_3(\theta) \equiv \frac{\langle \kappa_\theta^3 \rangle}{\langle \kappa_\theta^2 \rangle^2} = -40 \Omega_0^{-0.8} z_s^{-1.35}. \quad (317)$$

Il est sans doute utile de faire un certain nombre de commentaires,

- La variance dépend non seulement de l'amplitude des fluctuations (caractérisée par σ_8) mais aussi de Ω_0 .
- La skewness est indépendante de l'amplitude des fluctuations (comme on s'y attend pour des conditions initiales Gaussiennes), mais dépend de Ω_0 . La mesure conjointe de la variance et de s_3 est nécessaire pour lever la dégénérescence entre σ_8 et Ω_0 .
- Ces deux quantités dépendent de la distribution en redshift de la population de galaxie sources utilisée pour faire les mesures.

Pour l'instant aucune mesure de ces quantités n'a été faite. On en est à des études de faisabilité et des investigations sur les erreurs systématiques possibles (projet DESCART avec Y. Mellier). Parmi les sources d'erreurs systématiques possibles on peut noter,

- les couplages non-linéaires des lentilles entre-elles en cas de lentilles multiples;
- l'existence de couplages observationnels supplémentaires dues en particulier à l'effet d'amplification qui peut changer la population d'objets sélectionnés;
- les effets de clustering des galaxies sources.

Ces sources d'erreur affectent la robustesse de l'interprétation cosmologique des cartes produites. A cela il faut encore ajouter une bonne détermination des redshifts des sources, mais aussi s'assurer que les cartes produites ont bien une origine cosmologique, autrement dit que la qualité optique instrumentale, le suivi du télescope, etc, permettent bien la réalisation de cartes fiables. C'est à ce jour là que les efforts les plus importants sont faits.

9 Vers le régime fortement non-linéaire

9.1 Données expérimentales

Les données expérimentales suggèrent que la hiérarchie obtenue avec la théorie des perturbations se prolonge dans le régime non-linéaire. C'est particulièrement vrai dans l'espace des redshift (voir la figure 27).

Par exemple on sait que la fonction de corrélation à trois points des galaxies peut se décrire par le produit de paires de fonctions de corrélation à deux points (Groth & Peebles 1977), i.e.,

$$\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = Q [\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + \text{sym.}] \quad (318)$$

où Q est de l'ordre de l'unité. Dans le cas de la théorie des perturbations Q est en fait une fonction sans dimension des angles et des distances entre points. Cette dépendance semble disparaître au profit de cette forme plus simple dans le régime non-linéaire. Des tentatives ont été faites pour mesurer des fonctions de corrélation d'ordre plus élevé mais cela devient très ardu à cause des dépendances géométriques.

Existe-t-il une explication naturelle à ces propriétés?

9.2 Les solutions auto-similaires

On aborde ici un régime qui est très non-linéaire et une description avec un fluide avec un seul flot serait donc inadaptée. Il faut revenir à l'équation d'évolution dans l'espace des phases,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - m \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (319)$$

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = \frac{4\pi G m}{a} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}.$$

On peut facilement montrer qu'il existe une famille de solutions possibles dites auto-similaires qui ont la dépendance en temps suivante,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = t^{-3\beta} \hat{f}(\mathbf{x}/t^\alpha, \mathbf{p}/t^\beta) \quad (320)$$

où les deux constantes satisfont,

$$\beta = \alpha + 1/3. \quad (321)$$

Cette relation s'obtient assez facilement en réécrivant l'équation (319) avec le changement de variable $\mathbf{u} = \mathbf{x}/t^\alpha$ et $\mathbf{v} = \mathbf{p}/t^\beta$. C'est la condition pour que la dépendance en temps se factorise. Il est important de remarquer qu'alors les fonctions de corrélations ne sont fonctions que de \mathbf{u} : elles ne dépendent plus explicitement du temps.

Je donne ici les relations de similarité pour le cas d'un Univers Einstein-de Sitter (Davis & Peebles 1977). Il existe des formes similaires pour le cas d'un univers ouvert dans la limite $\Omega \ll 1$ (Balian & Schaeffer 1988). On a vu que la virialisation des objets entraînait un découplage de leur dynamique par rapport à l'expansion générale. Cette propriété se retrouve au niveau de la fonction de corrélation à deux points. On s'attend en effet à ce que lorsque cette fonction devient grande elle tende simplement à s'opposer directement à l'expansion. Le

nombre de voisins d'un objet donné doit en effet rester constant dès que l'on se trouve au sein d'un objet très compact, en équilibre gravitationnel (comme une galaxie..). Dans la limite non-linéaire ($\xi_2(r) \gg 1$), la densité au voisinage d'un point s'écrit,

$$\rho'(\mathbf{x}) = \bar{\rho}(t) \xi_2(x, t). \quad (322)$$

Il faut alors que $\xi(x, t)$ se comporte comme a^3 à une distance réelle constante pour compenser les effets de dilution causés par l'expansion, soit,

$$\xi_2(x, t) \sim a^3 \hat{\xi}(ax). \quad (323)$$

On peut généraliser cette idée aux fonctions de corrélation de plus grand ordre et on obtient naturellement,

$$\xi_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, t) \sim a^{3(p-1)} \hat{\xi}_p(a \mathbf{x}_1, \dots, a \mathbf{x}_p). \quad (324)$$

Si on combine ces lois de conservation qui traduisent les hypothèses de corrélation stable avec la forme générale attendue pour les solutions auto-similaires, on obtient des lois d'échelle pour ces fonctions de corrélation,

$$\xi_2(\lambda x, t) = \lambda^{-\gamma} \xi_2(x, t) \quad (325)$$

$$\xi_p(\lambda \mathbf{x}_1, \dots, \lambda \mathbf{x}_p, t) = \lambda^{-(p-1)\gamma} \xi_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, t) \quad (326)$$

où γ est lié à l'exposant α par

$$\gamma = 6/(2 + 3\alpha). \quad (327)$$

Il suffit d'écrire que $a^3 \hat{\xi}(ax) = \hat{\xi}(x/t^\alpha)$. De plus si on suppose que la solution auto-similaire est toujours valable, du régime linéaire au régime non-linéaire, (ce qui stricto sensu implique le spectre de puissance initial suit une loi de puissance), alors on peut relier l'exposant γ à n : (Davis & Peebles 1977),

$$\hat{\xi}\left(\frac{x}{t^\alpha}\right) = x^{-(n+3)} t^{4/3} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3} \frac{1}{n+3} \Rightarrow \gamma = \frac{9+3n}{5+n}. \quad (328)$$

Cette relation est finalement assez bien vérifiée et elle traduit une propriété importante qui est que la dépendance spatiale de la fonction de corrélation non-linéaire doit pouvoir se reconstruire à partir du spectre initial.

9.3 La transformée linéaire-nonlinéaire à la Hamilton et al.

Cette idée a été exploitée à son maximum par Hamilton et al. (1991) qui ont montré qu'il existait une relation, au moins à peu près universelle, qui reliait la fonction de corrélation linéaire à la fonction de corrélation non-linéaire. Pour

écrire cette relation il faut écrire une espèce de relation de conservation de la matière,

$$r^3 (1 + \xi(r, t)) = \text{constante} \quad (329)$$

alors $\xi(r, t)$ est une fonction de $\xi_{\text{linéaire}}$ au point r_l de l'espace réel auquel on a

$$r_l^3 = r^3 (1 + \xi(r, t)). \quad (330)$$

Dans le régime linéaire, quand ξ est petit, r_l et r sont évidemment confondus, mais ce n'est plus le cas par la suite. L'idée vérifiée par Hamilton et al. est qu'il existe une fonction \mathcal{H} (une simple fonction pas une fonctionnelle) telle que,

$$\xi(r, t) = \mathcal{H} \left[\xi_{\text{linéaire}}(r_l, a_{\text{initial}}) \frac{a^2(t)}{a^2(t_{\text{initial}})} \right]. \quad (331)$$

Numériquement ces auteurs ont obtenus,

$$\mathcal{H}(x) = \frac{x + 0.358 x^3 + 0.0236 x^5}{1 + 0.0134 x^3 + 0.00202 x^{9/2}}. \quad (332)$$

Cette idée a été plus récemment abondamment reprise pour obtenir des transformées plus précises, et valable pour toutes les cosmologies, s'appliquant à $P(k)$ (Peacock & Dodds 1994, Jain et al. 1995).

9.4 Les modèles hiérarchiques

On a là une description phénoménologique du comportement de la fonction à deux points (ou de manière équivalente du spectre de puissance), mais évidemment cela ne constitue pas une description complète du champ non-linéaire. Je reviens alors aux propriétés d'échelle trouvées pour les fonctions de corrélation des grands ordres.

9.4.1 Décomposition en arbres des fonctions de corrélation

Un moyen de les réaliser 'à la main' est de supposer que la fonction de corrélation à l'ordre p s'écrit comme des produits de $p - 1$ fonctions de corrélation à deux points. C'est d'ailleurs, comme on l'a vu, un moyen assez juste de décrire la fonction de corrélation à 3 points.

Cela revient à dire que,

$$\xi_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \sum_{\text{config. } \alpha} Q_{p,\alpha} \prod_{\text{liens, (ij)}} \xi_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (333)$$

où les configurations sur lesquelles cette somme est faite correspondent à toutes les manières possibles de connecter p points ensemble avec des diagrammes en arbre, les liens sont l'ensemble des liens qui apparaissent entre 2 points (i,j).

9.4.2 Contraintes sur les $Q_{p,\alpha}$

Un des problèmes auquel on est confronté quand on veut construire explicitement de tels modèles hiérarchiques est qu'on n'est pas libre de prendre les paramètres $Q_{p,\alpha}$ qu'on veut. Il y a des conditions de positivité qui donnent un certain nombre de contraintes. Par exemple il faut que la fluctuation du nombre de voisins d'un point donné soit positive. Quand ξ est grand le nombre moyen de voisins dans un volume V est essentiellement, $nV\bar{\xi}$ si la densité de point est n tandis que le nombre moyen carré est donné par la fonction de corrélation à trois points moyennée,

$$\langle N_v \rangle \approx nV\bar{\xi} \quad (334)$$

$$\langle N_v^2 \rangle \approx n^2 V^2 \bar{\xi}_3. \quad (335)$$

Si on écrit que $\langle N_v^2 \rangle - \langle N_v \rangle^2$ est positif on obtient,

$$Q_3 > \frac{1}{3}. \quad (336)$$

On peut généraliser ce genre de contraintes et obtenir des conditions sur l'ensemble des $Q_{p,\alpha}$ (Fry 1984b), mais ce ne sera toujours que des conditions nécessaires et non suffisantes. Autrement dit on est jamais sûr que le modèle qu'on choisit est réalisable par un processus aléatoire quelconque. Si on part de modèles de fractales, par exemple celui donné par les points occupés par une marche aléatoire avec une loi de Levy, on n'obtient pas un modèle réaliste.

9.4.3 Les modèles

A priori les coefficients $Q_{p,\alpha}$ peuvent dépendre tout aussi bien de l'ordre p que de la géométrie α de l'arbre. Différentes hypothèses ont été explorées dans la littérature. Saslaw et Szapudi ont fait de nombreuses analyses en supposant que les paramètres Q ne dépendent que de p mais dans la suite je vais plutôt suivre les hypothèses de Bernardeau & Schaeffer (1992)! Pour réduire le nombre de paramètres on peut faire l'hypothèse que les paramètres $Q_{p,\alpha}$ s'écrivent comme des produits de vertex ν_p , un facteur ν_p par vertex qui apparaît dans la représentation diagrammatique de la fonction à p -points. Alors toutes des fonctions de corrélation peuvent être construites à partir de la fonction de corrélation à 2 points et de la fonction génératrice des vertex \mathcal{G} . Je la note de cette façon par analogie avec les résultats de la théorie des perturbations. La fonction \mathcal{G}_δ de la théorie des perturbations peut guider notre choix (c'est d'ailleurs un choix pas si mauvais) mais il n'y a a priori aucune de raison de penser que ces fonctions sont identiques.

9.5 Les probabilités de comptage

Pour calculer les probabilités de comptage on a besoin de connaître la fonction génératrice des cumulants. Il est facile de voir que la relation d'échelle (333)

induit des propriétés dites hiérarchiques entre les moyennes géométriques⁶ des fonctions de corrélation, $\bar{\xi}_p(R)$, dans des boîtes de rayon R ,

$$\bar{\xi}_p(R) \sim S_p \bar{\xi}^{p-1}(R), \quad (337)$$

où S_p sont des paramètres indépendants de R . On définit alors la fonction φ comme la fonction génératrice des paramètres S_p de la même manière que pour le cas perturbatif,

$$\varphi(y) = \sum_{p=1}^{\infty} -S_p \frac{(-y)^{p-1}}{p!}. \quad (338)$$

La relation entre les S_n et les ν_p n'est la même que celle donnée dans le cadre des calculs perturbatifs que dans une approximation de type champ moyen (qui est très bien vérifiée). L'hypothèse de comportement hiérarchique implique que la fonction génératrice φ est indépendante de σ du moins quand celui-ci est grand (on a vu que la théorie des perturbations permettait de calculer la limite $\sigma \rightarrow 0$ de cette quantité). Dans une longue étude Balian & Schaeffer (1989) ont examiné les propriétés génériques induites par une telle hypothèse sur les propriétés des probabilités de comptage.

9.5.1 Propriétés génériques de la distribution de densité

On sait que la fonction de probabilité de densité est reliée à la fonction génératrice $\varphi(y)$ à travers, la transformée de Laplace inverse,

$$p(\delta)d\delta = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma^2} \exp\left[-\frac{\varphi(y)}{\sigma^2} + \frac{y\delta}{\sigma^2}\right] d\delta. \quad (339)$$

Dans la suite je ne vais pas regarder les effets discrets, mais supposer qu'on travaille dans la limite continue (on peut de toute manière retrouver les expressions des probabilité de comptage par simple convolution avec une distribution de Poisson). La difficulté maintenant est de trouver des contraintes sur $\varphi(y)$. Cette fonction est loin de pouvoir prendre une forme arbitraire: il faut que toutes les quantités physiques qu'on peut considérer et calculer avec cette fonction aient un sens.

Un cas particulier important est la probabilité de vide $P(0)$, probabilité de ne trouver aucun objet dans un volume de rayon R si le champ de densité est décrit par des particules de densité n . Cette probabilité est donnée par

$$P(0) = \int d\delta p(\delta) \exp[-nV(1+\delta)], \quad (340)$$

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3. \quad (341)$$

⁶les moyennes géométriques des fonctions de corrélation s'identifient naturellement avec les cumulants de la distribution de densité filtrée dans cette même boîte

En utilisant (339) on obtient une expression qui s'intègre directement sur δ et qui donne,

$$P(0) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \frac{1}{y - nV\sigma^2} \exp\left[-\frac{\varphi(y)}{\sigma^2}\right]. \quad (342)$$

Finalement, $P(0)$ est donné par la valeur du résidu et s'exprime simplement en fonction de la fonction génératrice $\varphi(y)$ (White 1979, Balian & Schaeffer 1989)

$$P(0) = \exp\left(-nV \frac{\varphi(y)}{y}\right), \quad y \equiv nV\sigma^2. \quad (343)$$

Cette expression⁷ montre en tout cas que $\varphi(y)/y$ doit être fini et positif pour des valeurs arbitrairement grandes de y . Il est alors naturel de supposer que,

$$\varphi(y) \sim a y^{1-\omega} \quad y \gg 1, \quad (344)$$

avec $0 < \omega < 1$. Les valeurs de y positif correspondent à une série alternée pour φ . Par contre quand y est négatif tous les termes de la série ont le même signe et il n'y a pas de raison que $\varphi(y)$ converge toujours. On note y_s la plus petite (en valeur absolue) valeur de y où $\varphi(y)$ est singulier, et on peut paramétriser la forme de $\varphi(y)$ par,

$$\varphi(y) - \varphi_s \sim a_s (y - y_s)^{\omega_s}. \quad (345)$$

Avec ces hypothèses on peut entreprendre le calcul de $p(\delta)$. Il apparaît deux régimes, l'un correspondant aux régions plutôt sous-denses, l'autre aux régions sur-denses. Ici je vais m'intéresser exclusivement au deuxième. Il s'obtient on supposant que y ne prend que des valeurs finies ou petites ce qui permet de développer une partie des termes sous l'exponentiel et d'avoir,

$$p(\delta)d\delta = - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma^4} \frac{\varphi(y)}{\sigma^2} \exp\left[\frac{y\delta}{\sigma^2}\right] d\delta. \quad (346)$$

On voit que la fonction de distribution peut s'exprimer en fonction d'une unique intégrale, $h(x)$,

$$p(\delta)d\delta = \frac{d\delta}{\sigma^2} h\left(\frac{\delta}{\sigma^2}\right); \quad (347)$$

$$h(x) = - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \varphi(y) \exp(yx). \quad (348)$$

Les propriétés de $\varphi(y)$ induisent les propriétés suivantes pour $h(x)$,

$$h(x) = a \frac{1-\omega}{\Gamma(\omega)} x^{\omega-2}, \quad x \ll 1 \quad (349)$$

$$h(x) = - \frac{a_s}{\Gamma(-\omega_s)} x^{-\omega_s-1} \exp(y_s x), \quad x \gg 1 \quad (350)$$

⁷On retrouve le cas Poissonien quand $\varphi(y) = y$, c'est à dire quand on a annulé toutes les fonctions de corrélation

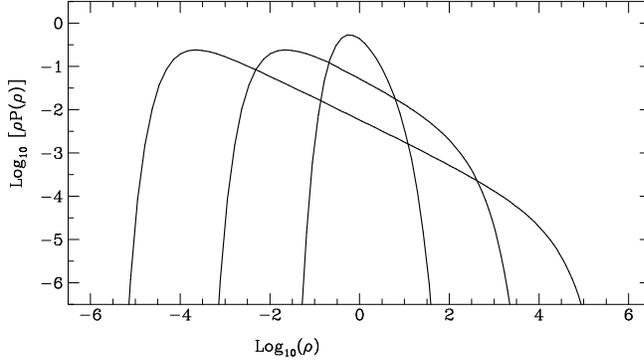


Figure 33: Evolution de la forme de la fonction de distribution de probabilité de la densité locale en fonction de la variance. Les cas $\sigma = 1, 10$ et 100 ont été tracés pour des cumulants correspondant à $n = -2$.

On voit donc que la fonction $h(x)$ (et par là même la fonction $p(\delta)$) est construite par assemblage d'une loi de puissance quand x est petit, et d'une coupure exponentielle à grand x (voir figure 33).

Il y a bien sûr une part d'arbitraire dans ce résultat (existence et forme de la singularité pour $\varphi(y)$, ...), aussi il est intéressant de voir ce qui peut être construit de manière générique.

On a vu que dans le cas de la théorie des perturbations, $\varphi(y)$ pouvait être construite à partir d'une fonction génératrice de vertex, $\mathcal{G}(\tau)$. Le comportement asymptotique de $\varphi(y)$ est lié au comportement asymptotique de $\mathcal{G}(\tau)$ pour τ positif. Plus spécifiquement si

$$\mathcal{G}(\tau) \sim c\tau^{-\kappa} \quad (351)$$

alors

$$\omega = \frac{\kappa}{\kappa+2}, \quad (352)$$

$$(1-\omega)a = \kappa^{-\omega} c^{1-\omega}. \quad (353)$$

Par exemple pour \mathcal{G} obtenu à partir de l'effondrement sphérique on a $\kappa = 3/2$, ce qui donne $\omega = 3/7 \approx 0.43$.

L'hypothèse d'une composition en arbres se révèle très féconde pour la partie singulière de $\varphi(y)$. En effet l'équation implicite en τ induit très naturellement une singularité en φ sans faire d'hypothèse particulière sur $\mathcal{G}(\tau)$. Ce point singulier est donné par la solution du système,

$$y_s = -\frac{1}{\mathcal{G}''(\tau_s)}, \quad (354)$$

$$\tau_s = \frac{\mathcal{G}'(\tau_s)}{\mathcal{G}''(\tau_s)}. \quad (355)$$

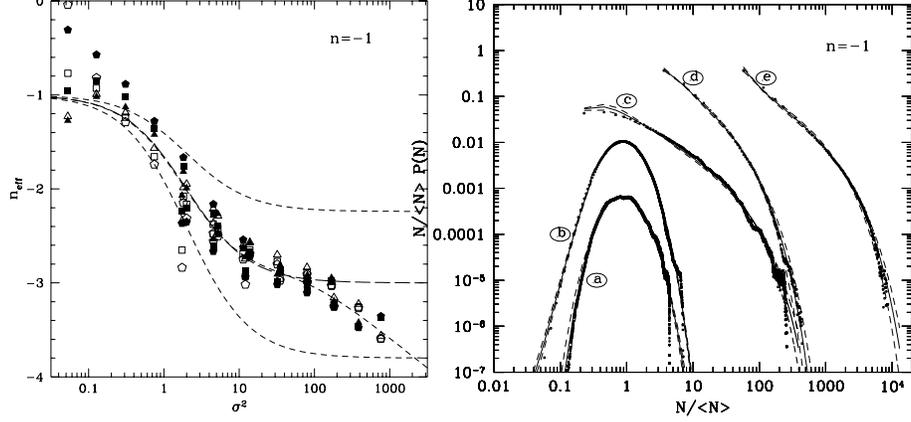


Figure 34: A gauche, détermination de l'indice effectif n_{eff} à partir des premiers moments S_p , $p = 3, 4, 5$ pour $n_{\text{lin}} = -1$. La courbe pointillée correspond au fit proposé dans le texte. A droite les probabilités de comptage mesurées $P(N)$ sont comparées aux prédictions théoriques obtenues avec ce n_{eff} . Les simulations ont été examinées à différents temps et avec différents rayons de filtrage.

Alors on a

$$\varphi(y) - \varphi_s \sim \frac{2}{3}(y - y_s)^{3/2} \mathcal{G}'(\tau_s) \mathcal{G}''(\tau_s) \left(\frac{2\mathcal{G}'(\tau_s) \mathcal{G}''(\tau_s)}{\mathcal{G}'''(\tau_s)} \right)^{1/2}. \quad (356)$$

Dans le cas du modèle de théorie des perturbations cette singularité semble en effet jouer un rôle actif. On a vu dans la section précédente quelles étaient les valeurs décrivant cette singularité en fonction de l'indice spectral.

9.5.2 La théorie des perturbations 'étendue'

Quel modèle pour $\varphi(y)$? Au delà du régime quasi-linéaire une idée est de suivre au plus près le modèle suggéré par la théorie des perturbations. Formellement on peut voir la forme fonctionnelle de $\varphi(y)$ comme étant paramétrée par l'indice spectral n . On peut donc 'oublier' la signification physique de ce paramètre et le supposer libre pour voir s'il est possible de l'ajuster pour décrire les résultats numériques, aussi bien au niveau des paramètres S_p que de la forme des $P(N)$. Ce travail a été mené à bien par Colombi et al (1997). L'idée de départ est la suivante: les mesures des premiers S_p fournissent une estimation de n_{eff} , en supposant que

$$S_p(n_{\text{eff.}}) \equiv S_p^{\text{mesure}}. \quad (357)$$

Le résultat remarquable de Colombi et al. est que les $n_{\text{eff.}}$ ainsi mesurés ne dépendent pas (ou peu) de l'ordre p (pour un spectre initial de forme donnée).

Table 2: Paramètres utilisés dans le fit (358).

n_{linear}	$n_{\text{nonlinear}}$	$n_{\text{nonlinear}}^-$	$n_{\text{nonlinear}}^+$	σ_0	τ
-2	-9.5	-12.4	-7.22	1.6	1.4
-1	-3	-3.8	-2.24	1.4	1.2
0	-1.2	-1.6	-0.86	1.25	0.6
+1	-0.85	-1.17	-0.57	0.7	0.3

On le voit sur la partie gauche de la figure (34). Du coup les probabilités de comptages qu'on obtient en utilisant le n_{eff} ainsi mesuré reproduisent très bien celles qui sont obtenues numériquement (partie droite de la figure 34).

Le paramètre n_{eff} est donné par

$$n_{\text{eff}} = n_{\text{lin}} + (n_{\text{non-lin}} - n_{\text{lin}}) \frac{x^\tau}{x^\tau + x^{-\tau}} \quad (358)$$

$$x = \exp[\log_{10}(\sigma^2/\sigma_0^2)].$$

Cette transition est décrite par la valeur de $n_{\text{non-lin}}$ atteinte pour les grandes valeurs de σ , le moment de la transition σ_0 et la largeur de cette transition, τ . Les paramètres trouvés sont donnés dans la table (2).

Les figures (34) montrent que la descriptions des moments et des $P(N)$ en terme d'un simple indice effectif sont effectivement prometteuses. Il n'y a cependant aucune justification théorique en faveur d'un tel comportement.

9.6 Distribution de matière et distribution de lumière: vers une théorie unifiée

Ultimement ce qu'on veut c'est une description complète des objets présents dans l'Univers, en particulier les propriétés de corrélation des puits de potentiel qui se sont créés. Ils sont implicitement contenus dans la description des fonctions de corrélation, aussi compliquées qu'aient pu être leurs histoires (accrétion, merging, ...). Potentiellement on doit donc faire beaucoup mieux que des théories à la Press et Schechter (1977) qui font des hypothèses drastiques sur la dynamique.

La mise en œuvre de ce calcul est cependant assez complexe. L'identification mathématique d'un puits de potentiel est une chose qui est loin d'être aisée. Cependant on est maintenant dans une situation assez favorable: les objets que l'on recherche ont des contrastes en densité très grands et leur détection ne doit dépendre que très peu du critère de sélection utilisé. Et en fait on va supposer que la simple probabilité d'avoir localement un contraste en densité suffisamment grand va suffire à définir un objet.

En conséquence de quoi la fonction $h(x)$ donne une description de la forme de la distribution de masse d'objets de taille donnée. Les propriétés de corrélation de ces objets seront données par les probabilités de comptage conjointes (à deux

points si on veut la fonction de corrélation à deux points, à 3 points si on veut celle à 3 points, etc...).

L'hypothèse d'une décomposition en arbres est alors encore extrêmement féconde pour faire le calcul de ces probabilités conjointes.

9.6.1 Le biais 'dynamique'

Il faut commencer par calculer la distribution conjointe, $p(\delta_1, \delta_2)$, probabilité d'avoir la densité δ_1 et la densité δ_2 conjointement en deux points aux positions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Pour obtenir une telle distribution il faut calculer la fonction génératrice $\varphi(y_1, y_2)$ des cumulants conjoints pris en deux points distincts. Plus précisément on peut définir C_{pq} par

$$\langle \delta_R^p(\mathbf{x}_1) \delta_R^q(\mathbf{x}_2) \rangle_c = C_{pq} \langle \delta_R^2 \rangle^{p+q-2} \langle \delta_R(\mathbf{x}_1) \delta_R(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (359)$$

Cette relation définit des paramètres finis C_{pq} dans la limite où la distance $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ est beaucoup plus grande que l'échelle de filtrage R . A partir de là on définit la fonction génératrice double,

$$\varphi(y_1, y_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{pq} \frac{(-y_1)^{p-1}}{p!} \frac{(-y_2)^{q-1}}{q!}. \quad (360)$$

en ayant posé,

$$C_{p0} = S_p, \quad C_{00} = 0. \quad (361)$$

La décomposition exacte en arbres implique que les facteurs C_{pq} ont en plus une propriété de factorabilité, c'est à dire que,

$$C_{pq} = C_p C_q \text{ pour } p > 1 \text{ et } q > 1. \quad (362)$$

C'est une propriété assez facile à voir d'un point de vue diagrammatique: le poids qu'on met d'un côté du diagramme ne dépend pas de la topologie qu'on met de l'autre côté. De plus, compte tenue de la remarque qui a été faite plus tôt, la fonction $\tau(y)$ s'identifie à la fonction génératrice des vertex à une patte externe. Plus précisément on a,

$$\tau(y) = - \sum_{p=1}^{\infty} C_p \frac{(-y)^{p-1}}{p!}, \quad (363)$$

quand $\tau(y)$ est solution du système donnant $\varphi(y)$. Cette relation fonctionnelle est extrêmement intéressante mais dépend de manière explicite de l'hypothèse de décomposition en arbres des fonctions de corrélation.

Si on exploite cette propriété on peut calculer la probabilité conjointe $p(\delta_1, \delta_2)$ qui s'écrit,

$$p(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{\sigma^8} h(x_1) h(x_2) [1 + b(x_1) b(x_2) \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \quad (364)$$

avec

$$h(x)b(x) = - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \tau(y) \exp(xy). \quad (365)$$

Autrement dit les régions les plus denses continuent à suivre une loi hiérarchique. Le facteur $b(x)$ s'identifie au facteur de biais entre les pics. Cela implique que le biais est a priori une fonction de $x \equiv \frac{\delta}{\sigma^2}$ uniquement (et pas de δ par exemple). La forme de $b(x)$ n'a pas a priori une forme indépendante des paramètres des modèles. Cependant la singularité qui apparaît naturellement pour $\varphi(y)$ induit un comportement spécifique pour $b(x)$,

$$b(x) \sim x \text{ quand } x \gg 1. \quad (366)$$

Le résultat générique est donc que le biais croît avec la rareté. Ce résultat obtenu à partir d'une description aussi réaliste que possible du régime non-linéaire prolonge d'une certaine manière les calculs de Bardeen et al. (1986) menés dans un champ Gaussien. La principale conséquence de ces calculs est qu'a priori les puits de potentiel qui se forment sont effectivement biaisés.

9.6.2 La hiérarchie des corrélations pour les pics de densité

Le paragraphe précédent présente les résultats pour la fonction de probabilité à deux points. On peut en fait généraliser ces résultats pour des fonctions de corrélation d'ordre donné. Dans l'hypothèse de fonctions de corrélation en arbre, on peut définir la fonction génératrice des arbres à un nombre arbitraire de pattes. Cela permet de calculer l'ensemble des propriétés de corrélation jusqu'à un ordre donné. Les résultats sont les suivants,

- Les propriétés hiérarchiques des fonctions de corrélation aux grands ordres sont conservées.
- Les paramètres S_p correspondant sont des fonctions de x uniquement.
- Dans la limite $x \rightarrow \infty$, ces paramètres ont une limite finie donnée par

$$S_p(x) \rightarrow p^{p-2} \text{ quand } x \rightarrow \infty. \quad (367)$$

Ces résultats sont assez généraux et dépendent finalement peu des hypothèses précises sur les fonctions de corrélation. Ils supposent des propriétés de régularité de la fonction génératrice des vertex. Une conséquence, peut-être importante, de ces résultats est que les S_p des pics rares devraient être les mêmes qu'on soit dans le régime quasi-linéaire ou dans le régime fortement non-linéaire. C'est peut-être le début d'une explication pour les observations qui sont faites.

Ces résultats montrent que même en l'absence de mécanismes non-gravitationnels il est possible d'avoir des effets de biais. Il faudrait, pour faire mieux, connaître les solutions explicites du régime non-linéaire.

10 Conclusions

Dans ce petit tour d'horizon de la cosmologie j'ai été loin d'être exhaustif. Dans le domaine de l'évolution des grandes structures je n'ai pas mentionné bon nombre de domaines de recherche en plein développement, comme

- L'étude des flots cosmiques à grande échelle, et leur utilisation pour mesurer les paramètres cosmologiques;
- L'étude des amas de galaxies et de leur contenu aussi bien en matière noire (études dynamique, reconstruction de masse par effets de lentilles gravitationnelles..), qu'en matière baryonique (galaxies, rayonnement X.);
- L'étude des absorbants et des objets de grand z ;
- ...

Du point de vue du physicien théoricien un domaine de recherche de prédilection est inconstablement la cosmologie primordiale, lieu de rencontre entre la physique des hautes énergies et la cosmologie observationnelle.

Cependant la formation des grandes structures recelle un certain nombre de problèmes ouverts d'intérêt,

- La théorie des perturbations est loin d'avoir livré tous ses secrets. En particulier il serait extrêmement utile de comprendre les corrections en boucles.
- De nombreux aspects du régime non-linéaire ne sont pas compris. Par exemple on ne sait pas décrire la transition vers le régime multiflots qui conduit à la virialisation de la matière dans les puits de potentiel. Il serait aussi très intéressant de pouvoir exhiber une solution explicite des équations dynamiques dans le régime nonlinéaire (même si ce n'est qu'une forme asymptotique).
- L'exploitation des catalogues tridimensionnel ou bidimensionnel notamment avec la mise en évidence de propriétés non-Gaussiennes n'est pas encore optimale. La question se pose par exemple pour les cartes de distorsion gravitationnelle.
- La relation entre baryons et matière noire est un domaine qui n'a pratiquement pas été exploré. On ne dispose pour l'instant que d'expériences numériques pour essayer de comprendre ce qui se passe.

References

- [1] Albrecht, A. astro-ph/9802135

- [2] Balian, R. & Schaeffer, R. 1988 *Astrophys. J.* **335**, L43
- [3] Balian, R. & Schaeffer, R. 1989 *Astr. & Astrophys.* **220**, 1
- [4] Bardeen, J. M. 1980 *Phys. Rev. D* **22**, 1882
- [5] Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N. & Zsalay, A. S. 1986 *Astrophys. J.* **304**, 15
- [6] Baugh, C.M. & Gaztañaga, E. 1996 *Mon. Not. R. astr. Soc.* **1996**, 280L37
- [7] Baugh, C.M., Gaztañaga, E. & Efstathiou, G., 1994, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **274**, 1049
- [8] Bernardeau, F. 1992, *Astrophys. J.* **292**, 1
- [9] Bernardeau, F. 1994a, *Astrophys. J.* **427**, 51
- [10] Bernardeau, F. 1994b, *Astrophys. J.* **433**, 1
- [11] Bernardeau, F. 1994c, *Astr. & Astrophys.* **291**, 697
- [12] Bernardeau, F. 1995, *Astr. & Astrophys.* **301**, 309
- [13] Bernardeau, F. & Kofman, L., 1995, *Astrophys. J.* **443**, 479
- [14] Bernardeau, F. & Schaeffer, R., 1992, *Astr. & Astrophys.* **255**, 1
- [15] Bernardeau, F., van Waerbeke, L. & Mellier, Y. 1997, *Astr. & Astrophys.* **324**, 15
- [16] Bertschinger, E., Dekel, A., Faber, S.M., Dressler, A. & Burstein, D. 1990, *Astrophys. J.* **364**, 370
- [17] Blanchard, A., Valls-Gabaud, D., Mamon, G.A., 1992, *Astr. & Astrophys.* **264**, 365
- [18] Blandford, R. D., Saust, A. B., Brainerd, T. G., Villumsen, J. V. 1991, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **251**, 600
- [19] Bond, J. R., Kaiser, N., Cole, S. & Efstathiou, G. 1991 *Astrophys. J.* **379**, 440
- [20] Bouchet, F., Juszkiewicz, R., Colombi, S. & Pellat, R., 1992, *Astrophys. J.* **394**, L5
- [21] Bouchet, F., Strauss, M.A., Davis, M., Fisher, K.B., Yahil, A. & Huchra, J.P. 1993, *Astrophys. J.* **417**, 36
- [22] Colombi, S., Bernardeau, F., Bouchet, F.R. & Hernsquist, L., 1997, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **287**, 241
- [23] Colombi, S., Bouchet, F.R. & Schaeffer, R. 1995, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **96**, 401
- [24] Dekel, A. 1994, *Annual Review of Astr. & Astrophys.* **32**, 371
- [25] Davis, M., Peebles, P.J.E., 1977 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **34**, 425
- [26] Dekel, A. 1994 *Annual Review of Astr. & Astrophys.* **32**, 371

- [27] Dekel, A. & Rees, M.J. 1994 *Astrophys. J.* **422**, L1
- [28] Dekel, A., Bertschinger E. & Faber, S.M. 1990, *Astrophys. J.* **364**, 349
- [29] Des Cloiseaux, J., Jannink, G., 1987, *Les polymères en solution*, Les éditions de physique, Les Ulis, France.
- [30] Doroshkevich, A. G. 1970 *Astrofizica*, **6**, 581
- [31] Eke, V.R., Cole, S. & Frenk, C.S. 1996 *Mon. Not. R. astr. Soc.* **282**, 263
- [32] Fry, J., 1984, *Astrophys. J.* **279**, 499
- [33] Fry, J., 1984b, *Astrophys. J.* **277**, L5
- [34] Gaztañaga, E., 1994, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **268**, 913
- [35] Gaztañaga, E. & Bernardeau, F. 1998, *Astr. & Astrophys.* **331**, 829
- [36] Gaztañaga, E. & Frieman J. 1994, *Astrophys. J.* **437**, L13
- [37] Gaztañaga, E. & Mähönen, 1996, *Astrophys. J.* **462**, L1
- [38] Goroff, M.H., Grinstein, B., Rey, S.-J. & Wise, M.B. 1986, *Astrophys. J.* **311**, 6
- [39] Groth, E., Peebles, P.J.E., 1977 *Astrophys. J.* **217**, 385
- [40] Hamilton, A.J.S., Kumar, P., Lu, E. & Matthews, A. 1991 *Astrophys. J.* **374**, L1
- [41] Hivon, E., Bouchet, F., Colombi, S., Juszkiewicz, R. 1995, *Astr. & Astrophys.* **298**, 643
- [42] Hu, W. T., PhD thesis, 1995, University of California at Berkeley
- [43] Hubble, E., 1929, em Proc. NAS, **15**, 168
- [44] Jain, B, Mo, H. J. & White, S. D. M. 1995, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **276**, 25
- [45] Juszkiewicz, R. 1981, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **197**, 931
- [46] Juszkiewicz, R., Bouchet, F.R. & Colombi, S. 1993, *Astrophys. J.* **412**, L9
- [47] Juszkiewicz, R., Weinberg, D. H., Amsterdamski, P., Chodorowski, M. & Bouchet, F., 1995, *Astrophys. J.* **442**, 39
- [48] Kaiser, N. 1992 *Astrophys. J.* **388**, L72
- [49] Kaiser, N. 1995 *Astrophys. J.* **439**, 1
- [50] Kofman, L., Bertschinger, E., Gelb, M. J., Nusser, A., & Dekel, A. 1994 *Astrophys. J.* **393**, 437
- [51] Lachièze-Rey, M. & Luminet, J.P. gr-qc/9605010
- [52] Lahav, O. Itoh, M. Inagaki, S. & Suto, Y. 1994 *Astrophys. J.* **402**, 387
- [53] Lahav, O., Lilje, P.B., Primack, J.R. & Rees, M. 1991 *Mon. Not. R. astr. Soc.* **251**, 128

- [54] Limber, D.N., 1954 *Astrophys. J.* **119**, 655
- [55] Lokas, E., Juskiewicz, R., Weinberg, D.H., Bouchet, F.R., 1995, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **274**, 730
- [56] Lokas, E., Juskiewicz, R., Bouchet, F.R., Hivon, E., 1996 *Astrophys. J.* **467**, 1
- [57] Makino, N, Sasaki, M., Suto, Y. 1992 *Phys. Rev. D* **46**, 585
- [58] Mather et al. 1990 *Astrophys. J.* **354**, 37
- [59] Miralda-Escudé, J. 1991 *Astrophys. J.* **380**, 1
- [60] Nusser, A., Dekel, A. 1993 *Astrophys. J.* **405**, 437
- [61] Oukbir, J., Blanchard, A. 1997, *Astr. & Astrophys.* **317**, 1
- [62] Oukbir, J., Bartlett, J.G., Blanchard, A. 1997, *Astr. & Astrophys.* **320**, 365
- [63] Peacock, J. A. & Dodds, S. J. 1994, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **267**, 1020
- [64] Peebles, P.J.E. 1980; *The Large-Scale Structure of the Universe*; Princeton University Press, Princeton, N.J., USA;
- [65] Penzias, A.A., Wilson, R.W., 1965 *Astrophys. J.* **142**, 419
- [66] Perlmutter et al. astro-ph/9712212
- [67] Press, W.H. Schechter, P., 1974 *Astrophys. J.* **28**, 19
- [68] Sachs, R. K. 1961, *Proc. Roc. Soc. London* **A264**, 309
- [69] Schaeffer 1984, *Astr. & Astrophys.* **134**, L15
- [70] Schneider, P., Ehlers, J., Falco, E. E. 1992, *Gravitational Lenses*, Springer.
- [71] Scoccimarro, R. 1997, *Astrophys. J.* **487**, 1
- [72] Scoccimarro, R. & Frieman, J., 1996, *Astrophys. J.* **473**, 620
- [73] Scoccimarro, R., Colombi, S., Fry, J.N., Frieman, J.A. Hivon, E. & Mellot, A. 1998, *Astrophys. J.* **496**, 586
- [74] Seljak, U., & Zaldarriaga, M. 1996 *Astrophys. J.* **469**, 437
- [75] Shectman et al. 1996 *Astrophys. J.* **470**, 172
- [76] Smoot et al. 1992 *Astrophys. J.* **396**, L1
- [77] van Waerbeke, L., Bernardeau, F. & Mellier, Y. 1998, en préparation.
- [78] White, S.D.M. 1979, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **186**, 145
- [79] Zel'dovich, Ya.B., 1970 *Astr. & Astrophys.* **5**, 84