ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Бебихов Ю. В. – к.ф.-м.н., СВФУ им. М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал) в г. Мирном, г. Мирный, Республика Саха (Якутия), Россия

Семёнов А. С. – к.ф.-м.н., доцент, СВФУ им. М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал) в г. Мирном, г. Мирный, Республика Саха (Якутия), Россия

Якушев И.А. – к.ф.-м.н., СВФУ им. М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал) в г. Мирном, г. Мирный, Республика Саха (Якутия), Россия

Данная статья посвящена вопросам применения математического моделирования для расчета электрических цепей. Выбран пакет программ математического моделирования MatLab. Разработана методика расчета сложных электрических цепей путем решения систем линейных алгебраических уравнений матричным методом. Приведен пример вычисления в пакете MatLab токов ветвей и узловых потенциалов электрической цепи. Сделано заключение об универсальности использования математического моделирования в технических расчетах.

Ключевые слова: *математическое моделирование, программа MatLab, электрическая цепь, матрица, система уравнений.*

Введение. В настоящее время известно много программных продуктов для математического моделирования технических систем. Среди классических математических пакетов, таких как MathCAD, Maple, Mathematica, особое место занимает пакет программ MatLab [1]. Данный пакет предназначен для моделирования и исследования статических и динамических систем в широком понимании этого термина, включая и дискретные, и непрерывные, и гибридные модели. Главная его особенность – хорошая проработанность и отлаженность всех средств и методов программирования. MatLab получил наиболее распространенное применение в инженерной практике в отличие от других подобных программ. В состав системы входит ядро компьютерной алгебры Maple и пакет расширения Simulink, а также десятки других пакетов расширений. Система Simulink представляет собой библиотеку блоков, является в настоящее время одним из наиболее популярных инструментов численных расчетов и применяется в различных областях знаний [2].

Цель и задачи исследования. В настоящей работе была разработана методика решения систем линейных алгебраических уравнений для возможности математического моделирования сложных электрических цепей. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи: теоретическое исследование электрических цепей; приведение законов Ома и Кирхгофа к матричной форме; построение ориентированного графа; пример расчета основных параметров сложной электрической цепи матричным методом в пакете программ MatLab [3].

Краткая теоретическая часть. Электрическая цепь может включать в себя активные и пассивные элементы, такие как: источники энергии (напряжения и тока), резистивные элементы (сопротивления и проводимости), динамические пассивные элементы (индуктивности и емкости). Соединение элементов цепи рассматривается как обобщенная электрическая ветвь и ее частные случаи (рис. 1).

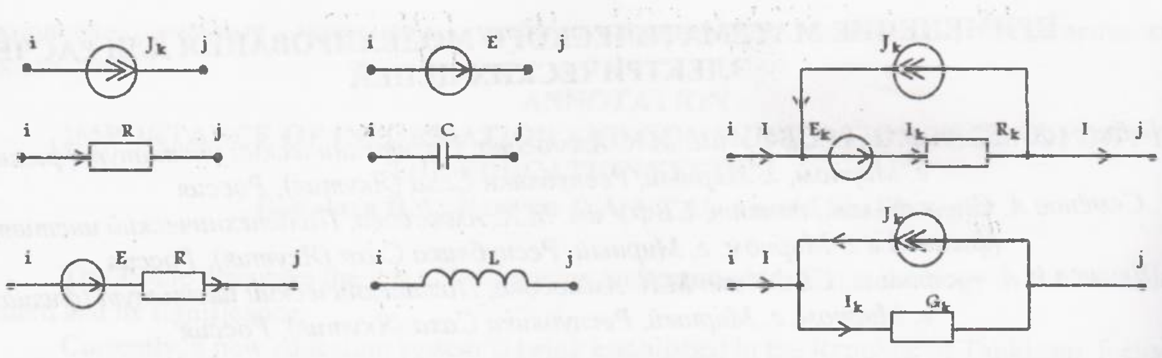

Рис. 1. Различные варианты соединения элементов в электрических цепях

Для каждого элемента схемы можно на основании законов Ома и Кирхгофа записать уравнения электрического равновесия:

- резистивный элемент R: $I = \frac{U}{R}$, $I = G \cdot U$, $U = R \cdot I$, $\varphi_j - \varphi_i + R \cdot I = 0$;

- индуктивный элемент L: $U = L \cdot \frac{di}{dt}$, $U = j\dot{I}L\omega$, $\dot{I} = \frac{U}{jL\omega}$;

- емкостной элемент C: $i = c\frac{dU}{dt}$, $\dot{I} = jc\omega U$, $\dot{U} = j\frac{1}{\omega c}\dot{I}$;

- источник тока и напряжения: $I = J$; $\varphi_i - \varphi_j + E = 0$;

- короткозамкнутая ветвь: $\varphi_i - \varphi_j = 0$;

- обобщенная ветвь: $I = G \cdot (U + E) - J$, $U = R \cdot (I + J) - E$;

- R-ветвь: $\varphi_i - \varphi_j = U = R \cdot I - E$;

- G-ветвь: $I = G \cdot (\varphi_i - \varphi_j) - J = G \cdot U - J$;

Все эти уравнения можно рассматривать как математические модели линейных элементов двухполюсников.

В то же время, состояние электрической цепи зависит не только от элементов схемы, но и от способа их соединения. Для узлов и контуров схемы записывают уравнения электрического равновесия на основании законов Кирхгофа. Они выражают связь между напряжениями и токами ветвей и называются топологическими. Для сложных электрических цепей, состоящих из большого числа линейных двухполюсников, целесообразно перейти от электрической цепи к графу (рис. 2). При этом узлы (места соединения трёх и более ветвей) схемы соответствуют вершинам графа, а её ветви – его рёбрам.

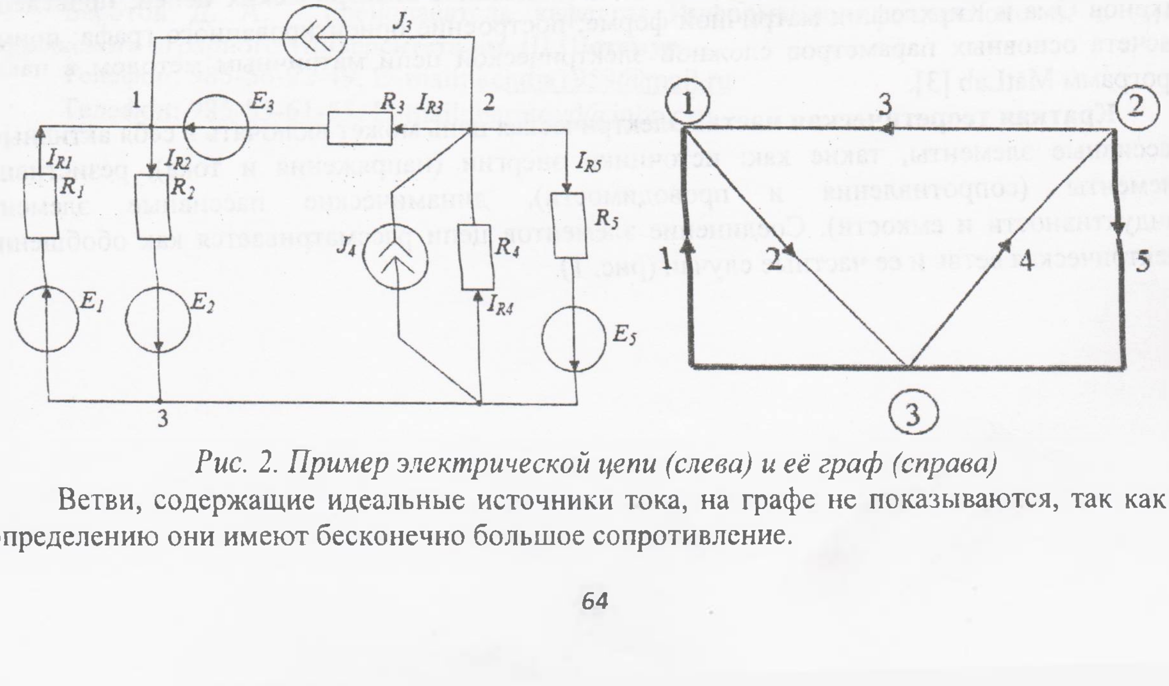

Рис. 2. Пример электрической цепи (слева) и её граф (справа)

Ветви, содержащие идеальные источники тока, на графе не показываются, так как по определению они имеют бесконечно большое сопротивление.

Методика исследования. Граф, построенный по приведенному выше примеру электрической цепи, называется ориентированным, т.е. направленным графом. Каждая его ветвь рассматривается как обобщённая электрическая ветвь, для которой справедлив закон Ома в матричной форме записи:

$$\begin{Bmatrix} U = R \cdot (I + J) - E \\ I = G \cdot (U + E) - J \end{Bmatrix},$$

где U – вектор-столбец напряжений обобщённых ветвей размерностью $(b \times 1)$; b – число обобщённых ветвей; R и G – диагональные матрицы сопротивлений и проводимостей ветвей размерностью $(b \times 1)$; I – вектор-столбец токов обобщённых ветвей размерностью $(b \times 1)$; J – вектор-столбец токов источников токов размерностью $(b \times 1)$; E – вектор-столбец ЭДС источников напряжения размерностью $(b \times 1)$.

Формализованный переход от графической модели к математической реализуется в виде матрицы инциденций A размерностью $(q\text{-}1) \times b$, у которой строки соответствуют узлам, а столбцы – ветвям. Здесь q – число вершин графа (узлов), b – число его дуг (ветвей). Элементы этой матрицы имеют значения +1, -1 и 0, если дуга выходит из вершины, входит в вершину и не связана с этой вершиной соответственно. Тогда первое уравнение Кирхгофа можно представить в виде:

$$A \cdot I = 0.$$

Получить независимую систему уравнений второго закона Кирхгофа можно при помощи дерева графа (на рис. 2 это выделенные ветви 1 и 5). Дерево содержит все узлы графа, но ни одного контура, и ветви связи, дополняющие до исходного графа. Число ветвей дерева $d=q\text{-}1$, число ветвей связи $k=b\text{-}(q\text{-}1)$. Ветви связи 2, 3, 4 образуют главные контуры, направление обхода контура в которых определяется направлением ветви связи. Тогда второе уравнение Кирхгофа в матричной форме будет иметь вид:

$$B \cdot U = 0,$$

где B – матрица главных контуров размерностью $(k \times b)$, т.е. строки соответствуют контурам, а столбцы – ветвям. Элементы этой матрицы имеют значения: +1, если ветвь входит в контур и её направление совпадает с направлением обхода контура; -1, если ветвь входит в контур и её направление не совпадает с направлением обхода контура; 0, если ветвь не принадлежит контуру.

Если в качестве неизвестных выбрать потенциалы независимых узлов (например, φ_1 и φ_2), то необходимо решать матричное уравнение:

$$A \cdot G \cdot A^T \varphi = A \cdot J - A \cdot J \cdot E.$$

Если же в качестве неизвестных выбрать контурные токи (токи ветвей связи), то необходимо решать матричное уравнение:

$$B \cdot R \cdot B^T I = B \cdot E - B \cdot R \cdot J,$$

что и будет рассмотрено в качестве примера в результатах исследования.

Результаты исследования. Проверим нашу методику для электрической цепи, изображенной на рис. 2. Принимаем потенциал узла $\varphi_3=0$. Тогда деревом графа будут ветви 1 и 5; а ветвями связи – ветви 2, 3, 4. Определяем главные контуры – это контуры, которые обязательно содержат как ветви дерева графа, так и ветви связи. В нашем случае будет три главных контура, которые будут содержать ветви: 2 и 1; 3, 1 и 5; 4 и 5 (рис. 3).

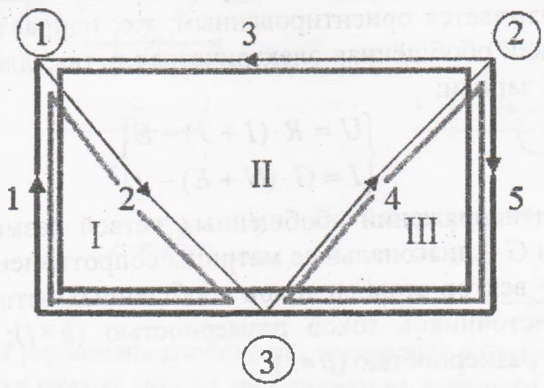

Рис. 3. Определение главных контуров графа электрической цепи

Матрицы, входящие в матричные уравнения, будут иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & 0 & E_5 \end{pmatrix}^T; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -J_3 & -J_4 & 0 \end{pmatrix}^T;$$

$$R = diag(R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5); \quad G = diag(1/R_1 \quad 1/R_2 \quad 1/R_3 \quad 1/R_4 \quad 1/R_5).$$

Для решения матричных уравнений в пакете программ MatLab зададимся следующими параметрами элементов электрической цепи: $E_1=3$ *В*, $E_2=E_3=2$ *В*, $E_5=1$ *В*; $J_3=1$ *А*, $J_4=0,5$ *А*; $R_1=4$ *Ом*, $R_2=6$ *Ом*, $R_3=2$ *Ом*, $R_4=8$ *Ом*, $R_5=10$ *Ом*. Дальнейшие результаты математического моделирования будут отображены в виде скриншотов из графического интерфейса пакета программ MatLab [4].

Графический интерфейс пакета MatLab состоит из четырёх независимых окон. Окно Command Window является основным и предназначено для ввода чисел, переменных, выражений и команд, для просмотра результатов вычислений, для отображения текстов выполняемых программ, а также для вывода сообщений об ошибках. В рабочей области окна находится строка ввода команд (зона редактирования), отмеченная знаком>>, в которой можно вводить числа, имена переменных и знаки операций [5,6].

Поэтапно в рабочую область вводим матрицы и сразу получаем решения, которые используются для дальнейших расчетов. Поэтому для получения корректного решения, необходимо соблюдать указанную далее последовательность:

1. Вводим матрицы *A* – инциденций, *B* – главных контуров, *E* – ЭДС ветвей, *J* – источников токов, *RB* – сопротивлений ветвей, *R* – диагональных сопротивлений (рис. 4,а);

2. Вычисляем матрицы *RK* и *EK* – контурных сопротивлений и ЭДС; матрицы *IB* и *I* – токов ветвей связи и обобщенных ветвей (рис. 4,б);

3. Вводим матрицы GB и G – проводимостей ветвей и диагональных проводимостей; вычисляем матрицы GY и JY – узловых проводимостей и токов; FU – узловых потенциалов (рис. 4,в).

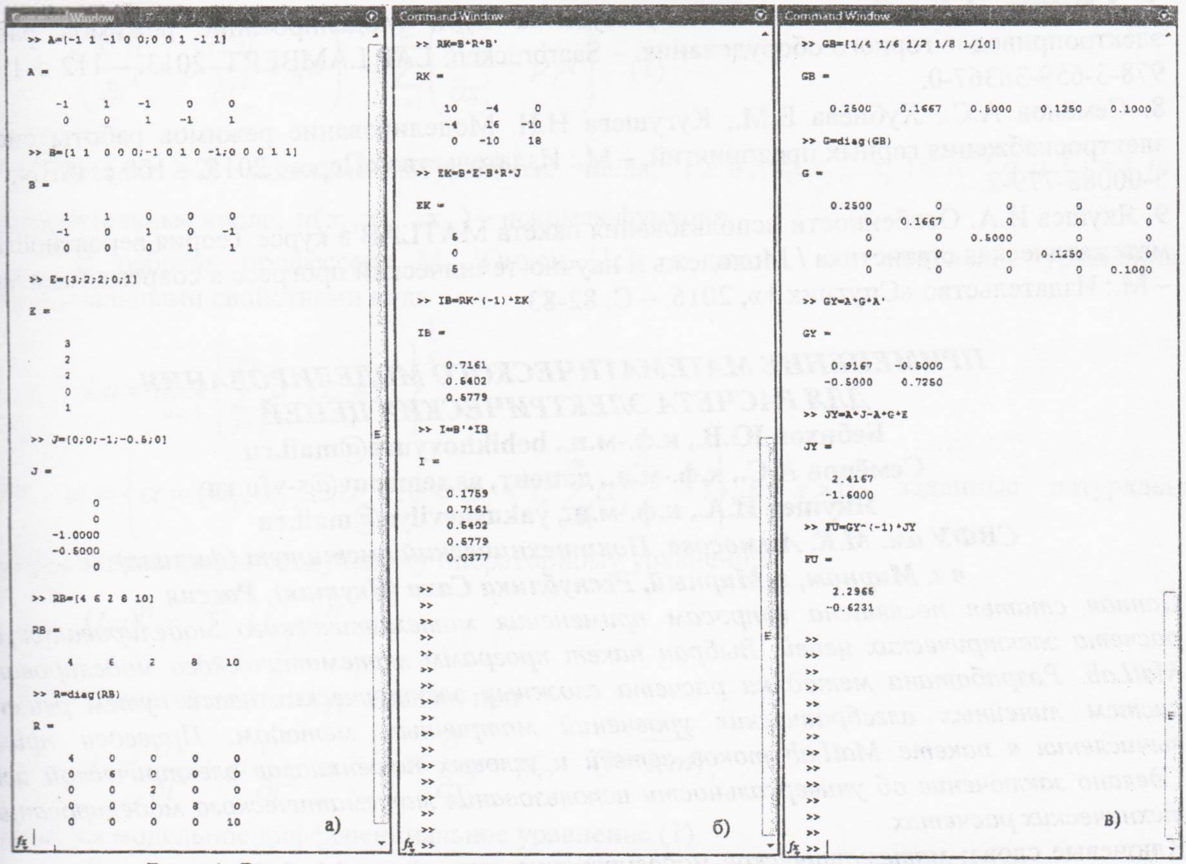

Рис. 4. Вычисление параметров электрической цепи в пакете MatLab

Таким образом, в результате расчета были получены величины токов ветвей: *I_1=0,1759 А, I_2=0,7161 А, I_3=0,5402 А, I_4=0,5779 А, I_5=0,0377 А*; и потенциалы узлов: *φ_1=2,2965 В* и *φ_2=-0,6231 В*. Далее не сложно будет рассчитать токи сопротивлений и в узлах по законам Кирхгофа.

Заключение. В результате проделанной работы была разработана методика расчета сложных электрических цепей методом математического моделирования путём решения систем линейных алгебраических уравнений матричным методом. Эта методика может быть полезна как для студентов высших учебных заведений при изучении дисциплин, связанных с электротехникой, так и для задач производственной и научной деятельности для ускорения и автоматизации большого объема расчетов. Из приведенных исследований можно сделать вывод, что математическое моделирование – это универсальный инструмент в наш век передовых информационных технология, с помощью которого можно решать сложные технические задачи любого уровня [7-9].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Семёнов А.С., Якушев И.А., Егоров А.Н. // Современные наукоемкие технологии. – 2017. – № 8. – С. 56-64. DOI: 10.17513/snt.36780.

2. Дьяконов В.П. MATLAB R2006/2007/2008 + SIMULINK 5/6/7. Основы применения. Учебное пособие. – М.: СОЛОН-Пресс, 2008. – 800 с.

3. Семёнов А.С. Моделирование автоматизированного электропривода. – М.: Издательство «Спутник +», 2012. – 60 с.

4. Семёнов А.С. Программа MATLAB. – М.: Издательство «Спутник +», 2012. – 40 с.

5. Семенов А.С., Кугушева Н.Н., Хубиева В.М., Матул Г.А. // Естественные и технические науки. – 2014. – № 3 (71). – С. 165-171.

6. Егорова А.А., Семёнов А.С., Петрова М.Н. // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 2-2. – С. 840.

7. Семёнов А.С., Кугушева Н.Н. , Хубиева В.М. Моделирование режимов работы электроприводов горного оборудования. – Saarbrucken: LAP LAMBERT, 2013. – 112 с. ISBN: 978-3-659-38367-0.
8. Семёнов А.С., Хубиева В.М., Кугушева Н.Н. Моделирование режимов работы систем электроснабжения горных предприятий. – М.: Издательство «Перо», 2015. – 100 с. ISBN: 978-5-00086-779-2.
9. Якушев И.А. Особенности использования пакета MATLAB в курсе Теория вероятностей и математическая статистика / Молодежь и научно-технический прогресс в современном мире. – М.: Издательство «Спутник +», 2016. – С. 82-83.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Бебихов Ю.В., к.ф.-м.н., bebikhovyura@mail.ru
Семёнов А.С., к.ф.-м.н., доцент, as.semenov@s-vfu.ru
Якушев И.А., к.ф.-м.н., yakushevilya@mail.ru
СВФУ им. М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал) в г. Мирном, г. Мирный, Республика Саха (Якутия), Россия

Данная статья посвящена вопросам применения математического моделирования для расчета электрических цепей. Выбран пакет программ математического моделирования MatLab. Разработана методика расчета сложных электрических цепей путем решения систем линейных алгебраических уравнений матричным методом. Приведен пример вычисления в пакете MatLab токов ветвей и узловых потенциалов электрической цепи. Сделано заключение об универсальности использования математического моделирования в технических расчетах.

Ключевые слова: *математическое моделирование, программа MatLab, электрическая цепь, матрица, система уравнений.*

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELING FOR CALCULATION OF ELECTRIC CIRCUITS

Bebihov Yu.V., Ph.D., bebikhovyura@mail.ru
Semenov A.S., Ph.D., associate professor, as.semenov@s-vfu.ru
Yakushev IA, Ph.D., yakushevilya@mail.ru
NEFU them. M.K. Ammosova, Polytechnic Institute (branch) in Mirny, Mirny, Republic of Sakha (Yakutia), Russia

This article focuses on the use of mathematical modeling for the calculation of electrical circuits. The MatLab software package is selected. A method has been developed for calculating complex electrical circuits by solving systems of linear algebraic equations using the matrix method. An example of the calculation in the MatLab package of the currents of the branches and node potentials of an electrical circuit is given. The conclusion was made about the universality of the use of mathematical modeling in technical calculations.

Keywords: mathematical modeling, MatLab program, electrical circuit, matrix, system of equations.