МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ - ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ И РАЗРЕШИМОСТИ ИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СРЕД

Курбанов И.К. – д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики РТСУ
Мирзоев А.Р. – д.п.н., директор ЦТ и дистанционного обучения ИПС

Рассмотрим первую начально-краевую задачу электромагнитоупругости[1-4]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t),$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D(E)}{\partial t} + J(E) + J_{\text{ст.}}(x, t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B(H)}{\partial t},$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad H\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \; u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,$$
$$H(x, 0) = H_0(x), \; E(x, 0) = E_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (3)$$

с определяющими уравнениями вида

$$\sigma_x = \widetilde{E}\varepsilon_x - \widetilde{\varepsilon}E, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$D(E) = \varepsilon E + \widetilde{\varepsilon}\varepsilon_x, \quad B(H) = \mu H, \qquad (4)$$

$$J(E) = \sigma(|E|)E = \widetilde{\sigma}|E|^p, \quad p \geq 2.$$

<u>Лемма.</u> Если $\rho, \mu, \widetilde{\varepsilon}, \varepsilon, \widetilde{E}$ – положительные постоянные, то для решения краевой задачи (1)-(4) справедлива априорная оценка

$$\chi(t) \leq (c_1 + \chi(0))\exp\{kt\}, \qquad (5)$$

где c_1 – означает различные константы,

$$\chi(t) = \rho\|u''(t)\|^2 + \varepsilon\|E'(t)\|^2 + \mu\|H'(t)\|^2 + \widetilde{E}\|u'(t)\|^p_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)},$$

$$k=\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\rho},\ \|a(t)\|^2=\int_\Omega a^2(x,t)dx.$$

Теорема. Пусть $f,\ J_{\text{ст.}}\in L^2(Q),\ H_0,\ E_0\in W_2^1(\Omega)$,

$$u_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^1(\Omega),$$
$$u_1\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{6}$$

Тогда существует решение $\{u\},\ \{H\},\ \{E\}$ притом единственное, задачи (1)-(4), удовлетворяющие условиям:

$$E\in L^\infty\left(0,T;\ W_2^1(\Omega)\cup L^{p'}\left(0,T;\ L^{p'}(\Omega)\right)\right),$$
$$H\in L^\infty\left(0,T;\ W_2^1(\Omega)\right),$$
$$H',\ E'\in L^\infty\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right),$$
$$u\in L^\infty\left(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)\right), \tag{7}$$
$$u'\in L^\infty\left(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$
$$u''\in L^\infty\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right).$$

Доказательство. Для доказательства существования решения воспользуемся методом Фаэдо-Галеркина. Выберем $u_{0n},\ u_{1n},\ E_{0n},\ H_{0n}$ таким образом, чтобы

$$u_{0n}\to u_0 \text{ в } \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega),\text{ при } n\to\infty,$$
$$u_{1n}\to u_1 \text{ в } \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \text{ при } n\to\infty,$$
$$H_{0n}\to H_0 \text{ в } \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \text{ при } n\to\infty, \tag{8}$$
$$E_{0n}\to E_0 \text{ в } \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L^p(\Omega),\text{ при } n\to\infty.$$

Такой выбор возможен. Приближенное решение задачи (1)-(4) будем искать в виде

$$u_n(t)=\sum_{j=1}^n d_{jn}(t)\vartheta_j,\quad \{\vartheta_j\}\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega),$$
$$H_n(t)=\sum_{j=1}^n c_{jn}(t)\varpi_j,\quad \{\varpi_j\}\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$$
$$E_n(t)=\sum_{j=1}^n b_{jn}(t)\varphi_j,\quad \{\varphi_j\}\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L^p(\Omega),$$

где $d_{jn}(t),\ c_{jn}(t)$ и $b_{jn}(t)$ определяются из уравнения:

$$\rho\left(u_n''(t),\ \vartheta_j\right)+\widetilde{E}a\left(u_n(t),\ \vartheta_j\right)+\widetilde{\varepsilon}\left(\frac{\partial E_n(t)}{\partial x},\ \vartheta_j\right)=-\left(f(t),\ \vartheta_j\right),$$

$$-\left(\frac{\partial H_n(t)}{\partial x},\ \varphi_j\right)=\varepsilon\left(E_n'(t),\ \varphi_j\right)+\left(J(E_n),\ \varphi_j\right)+\left(J_{\text{ст.}}(t),\ \varphi_j\right),$$

$$\left(\frac{\partial E_n(t)}{\partial x},\ \varpi_j\right)+\mu\left(H_n'(t),\ \varpi_j\right)=0, \tag{9}$$

$$a(u,\ \vartheta)=\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx.$$

Из (9) при $t=0$ следует, что

$$\rho\left(u_n''(t),\ \vartheta_j\right)+\widetilde{E}a\left(u_n'(t),\ \vartheta_j\right)+\widetilde{\varepsilon}\left(\frac{\partial E_n(0)}{\partial x},\ \vartheta_j\right)=-\left(f(0),\ \vartheta_j\right),$$

$$\left(\frac{\partial H_n(0)}{\partial x},\ \varphi_j\right)=\varepsilon\left(E_n'(0),\ \varphi_j\right)+c\left(\left|E_n(0)\right|^p E_n(0),\ \varphi_j\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial u_n'(0)}{\partial x},\ \varphi_j\right)+$$

$$+\left(J_{\text{ст.}}(0),\ \varphi_j\right), \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial E_n(0)}{\partial x},\ \varpi_j\right)+\mu\left(H_n'(t),\ \varpi_j\right)=0.$$

Умножим скалярно (10) на $d_{jn}''(0)$, $c_{jn}'(0)$ и $b_{jn}'(0)$ соответственно, просуммируем по j от 1 до n и сложим их результаты. Учитывая

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial x}\frac{\partial E}{\partial t}dx+\int_\Omega \frac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial x}\frac{\partial H}{\partial t}dx=0,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx+\int_\Omega \frac{\partial^3 E}{\partial x\,\partial t^2}\frac{\partial E}{\partial t}dx=0,$$

после некоторых преобразований получим

$$\rho\left\| u_n''(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\left\| E_n'(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\mu\left\| H_n'(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\le$$

$$\le\left\| J_{\text{ст.}}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+c\left(\left\|\left|E_{0n}\right|^p E_{0n}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|\widetilde{E}_n(0)\right\|_{L^2(\Omega)}+$$

$$+\left\| f(0)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\| u_n''(0)\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\| H_{0n}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\| H_{0n}'\right\|_{L^2(\Omega)}+\widetilde{E}\left\| u_{1n}\right\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Отметим, что в силу (7) и (9), $\left\| f(0)\right\|\in L^2(\Omega)$, $\left\| J_{\text{ст.}}(0)\right\|\in L^2(\Omega)$, $\left\| u_{1n}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\le \text{const}$, а функции $\left|E_{0n}\right|^p E_{0n}$ принадлежат ограниченному множеству в $L^2(\Omega)$.

Откуда

$$\rho\left\| u_n'''(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\left\| E_n'(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\mu\left\| H_n'(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\widetilde{E}\left\| u_{1n}\right\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\le \text{const}.$$

Продифференцируем (10) по t и, учитывая, что

$$\widetilde{c}\left|E\right|^p\le J(E)\le c\left|E\right|^p,\ p\ge 2, \tag{11}$$

найдем:

$$\rho\left(u_n'''(t),\ \vartheta_j\right)+\tilde{E}a\left(u_n'(t),\ \vartheta_j\right)+\tilde{\varepsilon}\left(\frac{\partial E_n'(t)}{\partial x},\ \vartheta_j\right)=-\left(f'(t),\ \vartheta_j\right),$$

$$-\left(\frac{\partial H_n'(t)}{\partial x},\ \varphi_j\right)=\varepsilon\left(E_n''(t),\ \varphi_j\right)+c(p+1)\left(\left|E_n(t)\right|^p E_n'(t),\ \varphi_j\right)+$$

$$+\tilde{\varepsilon}\left(\frac{\partial u_n''(t)}{\partial x},\ \varphi_j\right)+\left(J_{\text{ст.}}(t),\ \varphi_j\right), \qquad (12)$$

$$\left(\frac{\partial E_n'(t)}{\partial x},\ \varpi_j\right)+\mu\left(H_n''(t),\ \varpi_j\right)=0.$$

Умножим скалярно (12) на $d_{nj}''(t)$, $c_{nj}'(t)$ и $b_{nj}'(t)$ соответственно, просуммируем по j от 1 до n и сложив их результаты, получим равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\rho\left\|u_n''(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|E_n'(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\mu\left\|H_n'(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|u_n'(t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}^2\right]+$$

$$+c(p+1)\int_\Omega\left|E(t)\right|^p E'^2(t)dx=-\left(f'(t),\ u_n''(t)\right)-\left(J_{\text{ст.}}'(t),\ E_n'(t)\right)+\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u_n'^2(t)dx\right). \qquad (13)$$

Из тождества (13) в силу неравенства Гельдера и априорной оценки (8) после несложных преобразований получим неравенство:

$$\chi_n(t)+2c(p+1)\int_0^t\int_\Omega\left|E_n(t)\right|^p E_n'^2(t)dx\,dt\le c+\chi_n(0)+\int_0^t k\,\chi_n(\tau)d\tau, \qquad (14)$$

где c означает различные константы.

Следовательно из (14) вытекает, что

$$\chi_n(t)+\frac{2(p+1)}{\left(\frac{p}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left|E_n(\tau)\right|^{p/2}E_n(\tau)\right)\right)dx\,dt\le c+\chi_n(0)+\int_0^t k\,\chi_n(\tau)d\tau. \qquad (15)$$

Из (15) в силу леммы Гронуолла-Беллмана, получим оценку

$$\chi_n(t)\le\left(c+\chi_n(0)\right)\exp\{kt\}. \qquad (16)$$

Из априорной оценки (16) следует, что $t_n=T,\ \forall n$.

Учитывая условия (6), (9), (10), возвращаясь снова к (13), получим

$$\chi_n(t)+\frac{2(p+1)}{\left(\frac{p}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left|E_n(\tau)\right|^{p/2}E_n(\tau)\right)\right)^2dx\,dt\le\text{const}. \qquad (17)$$

Используя (8), (17), мы заключаем, что

$u_n''(t)$ ограничены в $L^\infty\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right)$,

$u_n'(t)$ ограничены в $L^\infty\left(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$,

$E_n'(t)$ ограничены в $L^\infty\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right)$,

$H_n'(t)$ ограничены в $L^\infty\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|E_n(t)\right|^{p/2} E_n(t)\right) \text{ ограничены в } L^2(Q).$$

Из оценки (17) вытекает, что из последовательностей $\{u_n\}$, $\{H_n\}$, $\{E_n\}$ можно выделить подпоследовательности $\{u_K\}$, $\{H_K\}$, $\{E_K\}$ такие, что

$$u'_K \to u' \text{ слабо в } L^\infty\left(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right),$$

$$u''_K \to u' \text{ слабо в } L^\infty\left(0, T;\ L^2(\Omega)\right),$$

$$E'_K \to E' \text{ слабо в } L^\infty\left(0, T;\ L^2(\Omega)\right),$$

$$H'_K \to H' \text{ слабо в } L^\infty\left(0, T;\ L^2(\Omega)\right),$$

$$J(E_K) \to J(E) \text{ слабо в } L^{p'}\left(0, T;\ L^{p'}(\Omega)\right).$$

Итак, мы уже доказали теорему, за исключением утверждения.

$$u \in L^\infty\left(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \cap W^2_2(\Omega)\right),\ H \in L^\infty\left(0, T;\ W^1_2(\Omega)\right)$$

$$E \in L^\infty\left(0, T;\ W^1_2(\Omega)\right) \cup L^{p'}\left(0, T;\ W^1_2(\Omega)\right).$$

Эти оценки получим с помощью исходных уравнений (1), определяющих уравнений (4) и оценки получения для u'', u', H', E' H, E и $J(E)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курбанов И. Нелинейные краевые задачи электромагнитоупругости с памятью. – Киев, 1990, 48с. (Препр. / АН УССР, Ин-т математики; 90, 46).
2. Курбанов И.К. Мирзоев А.Р. Существование и единственность решение нелинейных уравнений электромагнитоупругости, Докл. АН РТ, т. 38, №1-2, Душанбе, 1995, с. 93-98
3. Митропольский Ю.А., Курбанов И. О разрешимости краевых задач электромагнитоупругости с памятью // ДАН СССР. – Т. 317, 1991, №1, с.35-39.
4. Митропольский Ю.А., Березовский А.А., Коновалева Н.Р. Эквивалентная линеаризация систем с распределенными параметрами // Укр. мат. журн., 1986, 38, №4, с.464-471.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ - ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ И РАЗРЕШИМОСТИ ИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СРЕД

КурбановИ.К., Мирзоев А.Р.

Аннотация: В статье рассматриваются вопросы гладкости обобщенных решений краевой задачи электромагнитоупругости. Авторами установлено существование, единственность и гладкости обобщенных решений начально-краевой задачи электромагнитоупругости с общими определяющими уравнениями, т.е. существование функций $u(x, t)$, $u(x, t)$, $E(x, t)$, $H(x, t)$ в $Q = \Omega\,]0, T\,[$,

где $u \in L^\infty\left(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\right)$, $H \in L^\infty\left(0, T;\ L^2(\Omega)\right)$, $E \in L^\infty\left(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\right) \cap L^p\left(0, T;\ L^p(\Omega)\right)$.

Показано, что при несколько более сильных предложениях о данных задачах обобщенные решения существуют и принадлежат

$$H \in L^\infty\left(0, T;\ W^1_2(\Omega)\right),$$

$$E \in L^{\infty}\left(0, T;\ W_2^1(\Omega)\right) + L^{p'}\left(0, T;\ L^{p'}(\Omega)\right),$$

$$u \in L^{\infty}\left(0, T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)\right).$$

A MATHEMATICAL MODEL OF THE THEORY OF ELASTICITY OF ELECTROMAGNETOELASTIC AND THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR HOMOGENEOUS MEDIA

Kurbanov I. K., Mirzoev, A. R.

Abstract: The article deals with the smoothness of generalized solutions of the boundary value problem of electromagnetoelasticity. Also the authors generalized the existence and uniqueness of solutions of the initial boundary value problem of electromagnetoelasticity with General defining equations, i.e. the existence of functions $u(x, t)$, $u(x, t)$, $E(x, t)$, $H(x, t)$ в $Q = \Omega\,]0, T[$, where from $u \in L^{\infty}\left(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$, $H \in L^{\infty}\left(0, T;\ L^2(\Omega)\right)$,

$$E \in L^{\infty}\left(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right) \cap L^p\left(0, T;\ L^p(\Omega)\right).$$

There are shown that for several stronger propositions about these problems, generalized solutions exist and belong to

$$H \in L^{\infty}\left(0, T;\ W_2^1(\Omega)\right),$$

$$E \in L^{\infty}\left(0, T;\ W_2^1(\Omega)\right) + L^{p'}\left(0, T;\ L^{p'}(\Omega)\right),$$

$$u \in L^{\infty}\left(0, T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)\right).$$