

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ - ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА МНОГОКРАТНОГО ИОНООБМЕННОГО ФИЛЬТРОВАНИЯ СУСПЕНЗИЙ

Равшанов Н., Саидов У. (ТУИТ, Узбекистан)

Введение. Одним из важнейших этапов, играющим большую роль при приготовлении пищевых, масложировых, фармацевтических, горно-обогатительных, агропромышленных продуктов и т.д., является процесс разделения и фильтрования жидких и ионизированных растворов с помощью сепарирующих и фильтрующих агрегатов в зависимости от физико-механических свойств материалов и режимов работы агрегатов и машин, используемых в технологических циклах.

Так как эти процессы осуществляются с помощью различных видов фильтрующих агрегатов, неправильный выбор технологий и устройств приводит к значительной потере ценного сырья, уменьшению производительности фильтров, снижению качества получаемого выходного продукта. Поэтому необходимо исследовать и анализировать указанные выше процессы с помощью эффективных методов и легко реализуемых инструментов. Одним из таких эффективных инструментов выступают математическое моделирование и вычислительный эксперимент, реализуемые в виде программно-алгоритмических средств.

Очистка сырья и продуктов общественного назначения, например, питьевой воды производится путем фильтрования ее через многослойные фильтры, имеющие различные пористости и проницаемости. Для вывода математической модели рассматриваемого процесса, воспользуемся основными законами сохранения массы и количества движения и кинетики данного явления.

Постановка задачи. Пусть фильтровальные перегородки агрегата расположены параллельно друг к другу (рис. 1). Области $D^{(2)}$, $D^{(4)}$ заняты пористой средой, а области $D^{(1)}$ и $D^{(3)}$ - фильтруемым раствором, причем, расстояние BC может быть сколько угодно малым, а в случае, когда BC достаточно большое, следует рассматривать процесс как два однократных фильтрования и математическая модель процесса будет той же, что и в работах [1, 2].

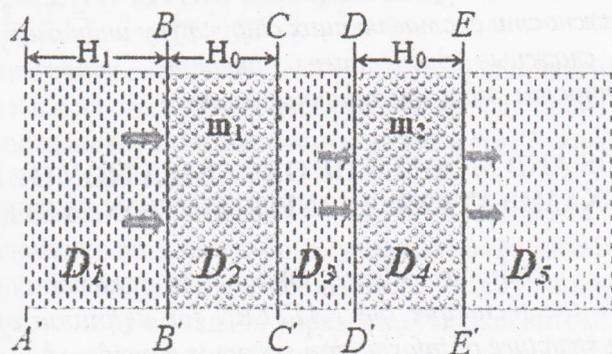


Рис. 1. Расчетная схема двухслойного фильтра

Пусть фильтрат, выходя из области, $D^{(2)}$ сразу же попадает в область $D^{(4)}$, т.е. область $D^{(3)}$ настолько мала, что изменение градиента давления незначительно. Если фильтровальные перегородки $D^{(2)}$ и $D^{(4)}$ одновременно являются ионитными фильтром, то уравнения ионообменного фильтрования записываются в виде [3,4]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_j}{\partial t} + W_j \frac{\partial W_j}{\partial x} - \frac{W_j}{1 - \theta_j^{(3)}} \frac{d\theta_j^{(3)}}{dt} &= - \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} - \frac{W_j}{\rho H K_{0j} (1 - \delta_j)^2}, \\ \frac{\partial \delta_j}{\partial t} &= \lambda_j (\theta_j - \gamma_j \delta_j), \\ \frac{\partial \theta_j m_j}{\partial t} + \frac{\partial W_j \theta_j}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \theta_j^{(3)}}{\partial t} &= \frac{W_{0j} (1 - \theta_j^{(3)})}{H_0 (1 - \theta_j^{(1)})} \left(\frac{1}{m_{1j}} - 1 \right) + \lambda_j (1 - m_{0j}) e^{\lambda_j \gamma_j t} - \int_0^{H_0} (\theta_j - \gamma_j \delta_j) dx \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial W_j n_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} &= D_j \frac{\partial^2 n_{ij}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} &= \beta_j (n_{ij} - n'_{ij}), \\ N_{ij} &= \frac{n'_{ij}}{a_j + b_j n'_{ij}}, \\ m_j &= m_{0j} + \delta_j (m_{0j} - m_{1j}), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь W_j - скорость фильтрования; P_j - давление; ρ и μ - плотность и вязкость фильтрата; K_{0j} - коэффициенты проницаемости; δ_j - концентрации частиц, оседающих в порах фильтра; θ_j - концентрация веществ в движущейся смеси; $\theta_j^{(3)}$ - концентрация частиц, протекающих через фильтровальные перегородки в областях $D^{(3)}$ и $D^{(5)}$ соответственно; m_j - пористости фильтра; n_{ij} - неравновесные концентрации обменивающихся ионов в растворе; N_{ij} - неравновесные концентрации обменивающихся ионов в сорбенте; n'_{ij} - концентрация ионов в растворе, соответствующая равновесию с концентрациями N_{ij} ; D_j - коэффициенты диффузии; β_j - эффективные константы скорости обменивающихся ионов; a_j и b_j - постоянные изотермы.

Краевые условия задачи (1) - (2) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= W_0, \quad W_2 = 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0, \\ \theta_1^{(3)} &= \theta_2^{(3)} = 0, \quad \theta_1 = \theta_0^{(1)}, \quad \theta_2 = 0, \\ n_1 &= n_2 = 0, \quad N_1 = N_{10}, \quad N_2 = N_{20} (t = 0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

на границе AA' :

$$W_1 = W_0, \quad \theta_1 = \theta_0^{(1)}, \quad n_1 = 0, \quad P_1 = 0 \quad (4)$$

на границе BB' :

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = a_1 \quad (5)$$

на границе CC' :

$$\left. \begin{aligned} K_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} \Big|_{x=H_0+0} &= K_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} \Big|_{x=H_0-0}, \quad m_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=H_0+0} = m_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=H_0-0}, \\ K_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=H_0+0} &= K_2 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=H_0-0} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

на границе DD' :

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} = a_2 \quad (7)$$

Метод решения. Задача (1) - (2) с условиями (3) - (7) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Поскольку эту задачу аналитическим путем решить затруднительно, то для численного интегрирования в системе (1) - (7) введем безразмерные переменные по формулам:

$$\bar{W}_j = \frac{W_j}{W_0}, \quad \bar{\delta}_j = \frac{\delta_j}{\theta_0^{(1)}}, \quad \bar{\theta}_j = \frac{\theta_j}{\theta_0^{(1)}}, \quad \bar{\theta}_j^{(3)} = \frac{\theta_j^{(3)}}{\theta_0^{(1)}}, \quad \bar{P}_j^{(3)} = \frac{P_j}{P_0}, \quad \bar{n}_j = \frac{n_j}{n_{10}}, \quad \bar{N}_j = \frac{N_j}{N_{10}},$$

$$\tau = \frac{t}{\alpha_\tau}, \quad \bar{x} = \frac{x}{H_0}, \quad \alpha_\tau = \frac{\rho HK_1}{\mu H_0} \times 1 \text{ час}$$

и опуская черточки над безразмерными переменными, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_j}{\partial \tau} + \text{Re} W_j \frac{\partial W_j}{\partial x} - \frac{W_j}{1 - \theta_j^{(3)}} \frac{d\theta_j^{(3)}}{d\tau} &= -Eu \text{Re} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{HK_1}{H_0^3} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} - \frac{W_j}{(1 - \theta_j^{(3)})(1 - \delta_j)^2}, \\ \frac{\partial \delta_j}{\partial \tau} &= \lambda_j \alpha_\tau (\theta_j - \gamma_j \delta_j), \\ \frac{\partial \theta_j m_j}{\partial \tau} + \text{Re} \frac{\partial W_j \theta_j}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial P_j}{\partial x} &= \frac{1}{Eu_1} \frac{W_j}{(1 - \sqrt{\delta_j})^3}, \\ \frac{d\theta_j^{(3)}}{d\tau} &= q_j(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial m_j n_{ij}}{\partial \tau} + \text{Re} \frac{\partial W_j n_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial \tau} &= P_{r\partial} \frac{\partial^2 n_{ij}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial N_{ij}}{\partial \tau} &= \beta_j \alpha_\tau \left(n_j - \frac{a_j N_{ij}}{1 - b_j N_{ij}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

со следующими краевыми условиями:

при $\tau = 0$

$$\begin{aligned} W_1 = 1, \quad W_2 = 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \theta_1^{(3)} = \theta_2^{(3)} = 0, \\ \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0, \quad n_1 = n_2 = 0, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = \frac{N_{20}}{N_{10}}, \end{aligned} \quad (10)$$

на границах AA'

$$W_1 = 0, \quad \theta_1 = 1, \quad n_1 = 0, \quad P_1 = 1, \quad (11)$$

на границах BB'

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \bar{a}_1, \quad (12)$$

на границах CC'

$$\left. \begin{aligned} K_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} \Big|_{x=1+0} &= K_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} \Big|_{x=1-0}; \\ m_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=1+0} &= m_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=1-0}; \\ K_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=1+0} &= K_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=1-0}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$\text{Re} = \frac{\rho K_0 W_0}{\mu H_0}$ - число Рейнольдса; $Eu = \frac{P_0 HK_0}{\mu H_0^2 W_0}$, $Eu_1 = \frac{P_0 K_0}{\mu H_0 W_0}$ - число Эйлера;

$P_{r\partial} = \frac{\text{Re}}{\text{Peg}}$ - число Прандтля; $\text{Peg} = \frac{D_j}{W_0 H_0}$ - диффузионное число Пекле;

$$K_j = K_{0j} (1 - \sqrt{\delta_j})^3$$

В уравнении фильтрования (8) для каждого слоя фильтра отдельно будем применять векторно-разностную схему [4].

Для численного интегрирования поставленной задачи, применяя векторную схему Самарского-Фрязинова и вводя обозначения

$$W_1 = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ V_{1i} \end{pmatrix}, \delta_1 = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \bar{\delta}_{1i} \end{pmatrix}, \theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_{1i} \\ \bar{\theta}_{1i} \end{pmatrix}, \theta_1^{(3)} = \begin{pmatrix} \theta_{1i}^{(3)} \\ \bar{\theta}_{1i}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$m_1 = \begin{pmatrix} m_{1i} \\ \bar{m}_{1i} \end{pmatrix}, W_2 = W_{2i} = \begin{pmatrix} U_{2i} \\ V_{2i} \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} \delta_{2i} \\ \bar{\delta}_{2i} \end{pmatrix}, \theta_2 = \begin{pmatrix} \theta_{2i} \\ \bar{\theta}_{2i} \end{pmatrix}, \theta_2^{(3)} = \begin{pmatrix} \theta_{2i}^{(3)} \\ \bar{\theta}_{2i}^{(3)} \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} m_{2i} \\ \bar{m}_{2i} \end{pmatrix},$$

вместе систем уравнений (14), (15) получим соответственно систему уравнений, описывающую первую и вторую стадии процесса фильтрования раствора через пористую среду.

Вычислительный эксперимент. На основе разработанного математического обеспечения задачи (1)-(7) были проведены вычислительные эксперименты на ЭВМ. Результаты расчетов приведены на рис. 2-5.

Численные расчеты показали, что при начальном времени $t=0.01$ ч на первой стадии скорость фильтрования резко уменьшается за счет образования слоя осадка на поверхности фильтра и заполнения пор фильтра гелевыми частицами. Особенно это заметно в верхнем слое фильтра, а на второй стадии скорость фильтрования почти не изменяется на верхнем слое фильтра. При $t=3.85$ ч на первой стадии происходит то же самое (рис. 2), на второй стадии уменьшение скорости фильтрования почти не происходит, особенно это заметно после первой половины толщины фильтра (рис. 3).

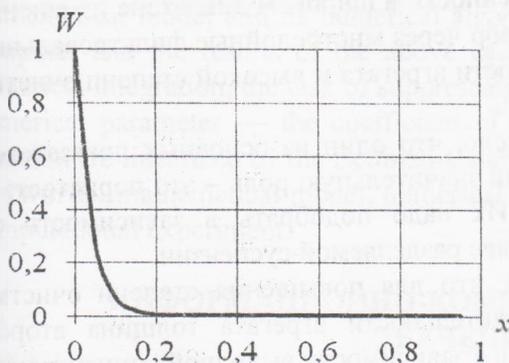


Рис. 2. Изменение скорости фильтрования по толщине фильтра на первой стадии фильтрования (при $t=3.85$ ч)

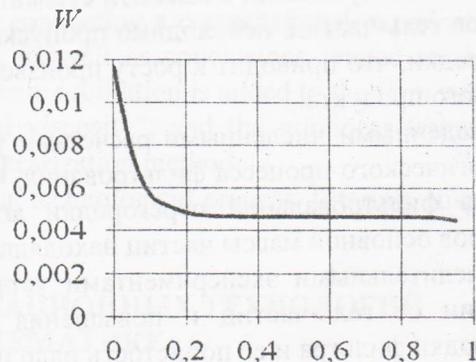


Рис. 3. Изменение скорости фильтрования по толщине фильтра на второй стадии фильтрования (при $t=3.85$ ч)

Проведенные численные расчеты на ЭВМ показали, что в начальный момент времени фильтрования (при $t=0.01$ ч) изменения концентрации на обеих стадиях процесса имеют почти одинаковый характер. Согласно проведенных численных расчетов на ЭВМ, концентрация на обеих стадиях процесса фильтрования уменьшается по глубине фильтровальной перегородки. При времени фильтрования $t=3.85$ ч изменения концентрации на верхних слоях фильтра на обеих стадиях уменьшается по толщине фильтра.

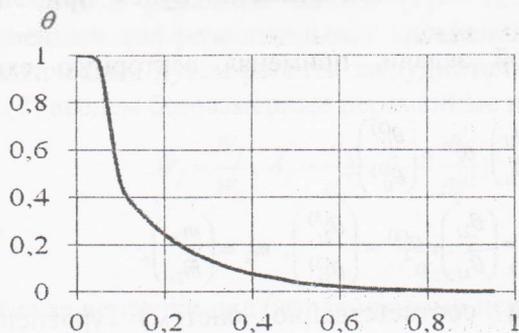


Рис. 4. Изменения концентрации движущей смеси по толщине фильтра при $t=3.85$ ч на первой стадии фильтрования раствора

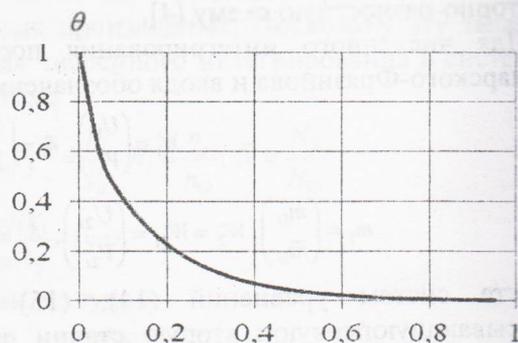


Рис. 5. Изменения концентрации движущей смеси по толщине фильтра при $t=3.85$ ч на второй стадии фильтрования раствора

Проведенные численные расчеты показали, что скорость осаждения гель-частиц в поровом пространстве фильтра на начальном этапе процесса резко растет, а затем она со временем будет уменьшаться. Численные расчеты проведенные на ЭВМ показали, что осаждение гель-частиц на поверхности фильтра больше на первой стадии фильтрования, чем на второй.

Как видно из анализа численных расчетов скорость осаждения концентрации частиц в поровом пространстве фильтра со временем постепенно будет уменьшаться.

Заключение. Анализ проведенных численных расчетов на ЭВМ показал, что при фильтровании суспензии с высокой степенью засоренности в широком диапазоне изменения размеров гель-частиц, необходимо пропускать раствор через многослойные фильтровальные перегородки, что приводит к росту производительности агрегата и высокой степени очистки выходного продукта.

Проведенными численными расчетами установлено, что один из основных показателей технологического процесса фильтрования, играющий значительную роль – это пористость и толщина фильтровальной перегородки агрегата. Их надо подобрать в зависимости от диаметров основной массы частиц находящей в составе разделяемой суспензии.

Вычислительными экспериментами установлено, что для повышения степени очистки суспензии от гель-частиц и повышения производительности агрегата толщина второй перегородки фильтра и её пористость надо подбирать в зависимости выходной концентрации суспензии, проходящей через первую ступень очистки.

Литература

- [1] Ravshanov N., Palvanov B., Muxamadiyev A. Computer modelling of process of filtering of the liquid of the ionized solutions for protection of the ecosystem from of pollution sources // TUIT bulletin. – 2015. – №.2(34). – Pp.100-105.
- [2] Равшанов Н., Палванов Б. Ю. Вычислительный эксперимент для исследования технологического процесса фильтрования жидких и ионизированных растворов // Электронный научный журнал «Отраслевые аспекты технических наук» – 2015. – Выпуск 3 (45) Май-июнь. – С. 18-28.
- [3] Равшанов Н., Палванов Б. Ю. Приближенно-аналитическое решение задачи технологического процесса фильтрования растворов от нежелательных ионов // Электронный научный журнал "Исследования технических наук". – 2016. – Выпуск 1(19) Январь-Март. – С. 25-36.
- [4] Ravshanov N., Palvanov B. Yu. Elmuradova B. Computer modelling of problems filtering low-concentration suspensions // International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. – 2016. – №.41. – Pp. 85-94 Doi: <http://dx.doi.org/10.15863/TAS>

ПРОЦЕССА МНОГОКРАТНОГО ИОНООБМЕННОГО ФИЛЬТРОВАНИЯ СУСПЕНЗИЙ

Равшанов Н., Саидов У.
(ТУИТ, Узбекистан)

Аннотация. В статье рассматривается задача, связанная с процессом ионообменного фильтрования ионизированных жидких растворов от тяжелых ионных соединений, выбрасываемых из объектов производства.

Для проведения комплексного исследования указанного процесса в работе приведен математический инструмент - математическая модель и численный алгоритм для проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ, а также результаты проведенных расчетов и выводы, связанные с ними. Для численного интегрирования задачи с целью подавления высокочастотных колебаний добавлен член с некоторым числовым параметром — коэффициентом «искусственной вязкости», а нелинейные члены уравнения линейризуются квазилинеаризационным методом Беллман-Калаба.

Ключевые слова: математическая модель, численный алгоритм, технологический процесс, фильтрование, суспензия, вычислительный эксперимент.

MATHEMATICAL MODEL - A TOOL FOR STUDYING THE PROCESS OF MULTIPLE ION-EXCHANGE FILTERING SUSPENSIONS

Ravshanov N., Saidov U.

Annotation. The article deals with the problem associated with the process of ion-exchange filtration of ionized liquid solutions from heavy ionic compounds emitted from production facilities. To carry out a comprehensive study of the above process, the paper presents a mathematical tool - a mathematical model and its numerical algorithm for conducting a computational experiment on a computer and the results of the above calculations, as well as conclusions related to them. For numerical integration, the task of suppressing small-scale oscillation is added to the term with some numerical parameter — the coefficient of “artificial viscosity”, and the nonlinear terms of the equation are linearized by the Bellman-Calaba quasilinearization method.

Keywords: mathematical model, numerical algorithm, technological process, filtering, suspension, computational experiment.