НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Самаров Ш. Ш. – Таджикский технический университет им. М.С. Осими

Определение температуры, $T(M,t)$ внутри неоднородного тела произвольной геометрической формы сводится к решению следующей краевой задачи [1]:

$$c\gamma\frac{\partial T}{\partial t}=div\left[\lambda(M)gradT\right]+W(M,t) \quad (1)$$

$$T(M,t)\big|_{t=0}=f(M), l\left[T(M,t)\right]_S=\varphi(M_S,t), \quad (2)$$

где $M(x,y,z)$ - текущая точка, M_s - точка на поверхности тела, S - граница области Ω, $W(M,t)$ - внутренний источник тепла, l - линейный оператор нулевого или первого порядка, заданной на поверхности S, $\lambda(M)$ - коэффициент теплопроводности, c - удельная теплоемкость, γ - плотность тело.

Оператор l может задаваться в виде $l[T]_S=\left[\lambda(M)\frac{\partial T}{\partial n}-\alpha(M)T(M,t)\right]_S$ при граничных условиях третьего рода, $l[T]_S=\left[\lambda(M)\frac{\partial T}{\partial n}\right]_S$ при граничных условиях второго рода, $l[T(M)]_S=[T(M,t)]_S$ при граничных условиях первого рода, где - внешний нормаль к поверхности S.

Положим $\overline{T}(M,p)=\int\limits_0^\infty T(V,t)\exp(-pt)dt$, тогда из (1) и (2) получим

$$L\left[\overline{T}(M,p)\right]-p\rho(M)\cdot\overline{T}(M,p)=-\overline{F}(M,p), \quad (3)$$

$$l\left[\overline{T}(M,p)\right]_S=\overline{\varphi}(M_S,p), \quad (4)$$

где

$$L\left[\overline{T}(M,p)\right]_S=div\left[\lambda(M)grad\overline{T}\right],$$

$$\overline{F}(M,p)=\rho(M)\cdot f(M)+\overline{W}(M,p),\ \rho=c\gamma,$$

$$\overline{\varphi}(M,p)=\int\limits_0^\infty\varphi(M_S,t)\exp(-pt)dt,$$

$$\overline{W}(M,p)=\int\limits_0^\infty W(M,t)\exp(-pt)dt.$$

Задачу (3), (4) приводим к решению задачи с нулевыми граничными условиями путем введения функции [2]

$$\overline{U}(M,p)=\overline{T}(M,p)-\overline{\Phi}(M,p), \quad (5)$$

где $\overline{\Phi}(M,p)$ - дважды дифференцируемая в области Ω функция, удовлетворяющая граничному условию

$$l\left[\overline{\Phi}(M,p)\right]_S=\varphi(M,p). \quad (6)$$

Функция $\overline{\Phi}(M,p)$ определяется простим подбором. Для функции $\overline{U}(M,p)$ получим граничную задачу

$$L\left[\overline{U}(M,p)\right]-p\rho(M,p)=-\overline{F}-L\left[\overline{\Phi}(M,p)\right]+p\rho\overline{\Phi}(M,p),$$
$$l\left[\overline{U}(M,p)\right]_S=0. \qquad (7)$$

Определив точное или приближенное решение задачи (6), (7) в область изображений и переходя в область оригиналов, найдем решение исходной задачи в виде

$$T(M,t)=\Phi(M,t)+U(M,t).$$

Определим приближенное решение задачи (6), (7).

Пусть дана система координатных функции $\psi_1(M),...,\psi_n(M)$, удовлетворяющее однородным граничным условиям (7), т.е. $l[\psi_k(M)]_S=0$.

Решение будем искать в семействе вида

$$\overline{T}_n(M,p)=\overline{\Phi}(M,p)+\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k(p)\psi_k(M). \qquad (8)$$

Коэффициенты $\overline{a}_k(p)$ определяется из условия ортогональности невязки ε_n ко всем координатным функциям $\psi_j(M)$. Эта приводит к системе вида

$$\sum_{k=1}^{n}(A_{jk}+B_{jk}\rho)\overline{a}_k(p)=D_j(p) \quad (j=1,2,..,n), \qquad (9)$$

где

$$A_{jk}=A_{kj}=\iiint_\Omega \lambda(M)\psi_k'(M)d\Omega,$$

$$B_{jk}=B_{kj}=\iiint_\Omega c\gamma\psi_k(M)\psi_j(M)d\Omega,$$

$$D_j=\iiint_\Omega \overline{F}(M,p)\psi_j'(M)d\Omega.$$

Положим $A\overline{U}=-L\left[\overline{U}\right]+\rho p\overline{U}$, где A - дифференциальный оператор краевой задачи (6), (7). Этот оператор положительный, следовательно, граничная задача $A\overline{U}=f^*$, $l\left[\overline{U}\right]_S=0$, где $f^*=\overline{F}+L\left[\overline{\Phi}\right]-\rho p\overline{\Phi}$ имеет единственное решение. Откуда как следствие вытекает, что и краевая задача (1) и (2) также имеет единственное решение. Координатные функции $\psi_1(M),...,\psi_n(M)$ - линейно независимы, поэтому основной определитель системы (9) отличен от нулю. Следовательно, система (9) при любых значениях $\varphi_1(M_S,p),\varphi_2(M_S,p),...,\varphi_n(M_S,p)$ вполне определяют коэффициенты изображения $\overline{a}_k(p)$. Определив эти коэффициенты и переходя в область оригиналов, получим решение исходной задачи в виде $T_n(M,t)=\Phi(M_S,t)+\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k$.

Таково общая идея метода совместного применения интегральных преобразований и ортогональной проекции.

В качестве примера рассмотрим задачу определения температуры внутри неограниченного цилиндра эллиптического сечения.

Исследуем неограниченный цилиндр эллиптического сечения, ось и образующая которого перпендикулярные плоскости xOy. Поместим начало координат в центре эллипса $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$. Пусть $W=0$ и начальная температура равна T_0, тогда краевая задача в безразмерных координатах имеет вид

$$\frac{\partial T(\xi,\eta,t)}{\partial t}=a\left(\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2}\right), \qquad (10)$$

$$\left[T(\xi,\eta,t)\right]_{t=0}=T_0,\ \left[T(\xi,\eta,t)\right]_\Gamma=\varphi(t), \qquad (11)$$

где $\xi = \frac{x}{b}, \eta = \frac{y}{c}$ - безразмерные координаты, Г-граница области $D\left\{1-\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2} \geq 0\right\}$.

После применения преобразование Лапласа задачи (10), (11) приводится к виду

$$a\left(\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2}\right)-p\bar{T}(\xi,\eta,p)+T_0=0 \quad (12)$$

$$\left[\bar{T}(\xi,\eta,p)\right]_{\Gamma}=\bar{\varphi}(p). \quad (13)$$

Решение задачи (12), (13) ищем в виде [3]

$$\bar{T}_n(\xi,\eta,p)=\bar{\varphi}(p)+\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k(p)\psi_k(\xi,\eta),$$

где $\psi_k=(1-\xi^2-\eta^2)(\xi^2+\eta^2)^{k-1}$, $k=1,2,...,n, \psi_k\big|_{\Gamma}=0$.

Рассмотрим следующие случаи:

а) Температуры стенки постоянная $T_{cm}=T_o$. Тогда относительная избыточная температура в первом приближении выражается формулой

$$\theta_1=\frac{T-T_0}{T_{cm}-T_o}=1-\frac{3}{2}(1-\xi^2-\eta^2)\exp(-6F_0),$$

где $F_0=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot t$.

б) Пусть температура стенки линейная функция времени, т.е. $T_{cm}=T_o+\Delta T\cdot t$. Тогда в первом приближений получим[4]:

$$\theta_1=1+\frac{N}{q}\left[2F_0-\frac{1}{2}(1-\xi^2-\eta^2)\right]-\frac{1}{2}(1-\xi^2-\eta^2)\left(3-\frac{N}{q}\right)\exp(-6F_0),$$

где $q=a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$, $N=\frac{\Delta T}{T_{cm}-T_o}$.

В) Температура стенки экспоненциальная функция времени, т.е. $T_{cm}=T_0+\Delta T[1-\exp(-mt)]$. Тогда получим

$$T_1(\xi,\eta,F_0)=T_0-\Delta T\left[1-\exp\left(-\frac{2m}{q}F_0\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta T\cdot m}{3q-m}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left(-\frac{2m}{q}F_0\right)-\exp(-6F_0)\right](1-\xi^2-\eta^2).$$

г) Температура стенки гармоническая функция времени, т.е. $T_{cm}=T_0+\Delta T\cdot\cos\omega t$, где ΔT - амплитуда колебание, ω - частота. Температура в этом случае равна

$$T_1(\xi,\eta,F_0)=T_0+\Delta T\cdot\cos(PdF_0)-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta T}{E^2}\cdot\left[9q^2\exp(-6F_0)-\omega E\sin(Pd\cdot F_0-\varphi)\right](1-\xi^2-\eta^2),$$

где $q=a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$, $Pd=\frac{2\omega}{q}$, $F_0=\frac{t}{2}q$, $E=\sqrt{\omega^2+9q^2}$.

Аналогичные результаты можно получить и при других поперечных сечениях (ромб, сегмент параболы, треугольник и другие)

Литература.

1.Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепло-массопереноса.-М.: МЭИ,2005,568с.

2.Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисления по двум переменным и его приложения. – М.: Физматиз, 1958, 380с.

3. Цой П.В., «Методы расчета задач тепломассопереноса». М.: Энергоатомиздат, 1984, 410с.

4.Махмаёров Б., Самаров Ш.Ш «Нестационарные температурные поля в длинных стержнях различного поперечного сечения». Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложенийи» посвященной 70-летию со дня рождения академика академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора ИлоловаМамадшо.с. 166-167, г.Душанбе, 2018г.

5. Лыков А. В. Теория теплопроводности.М.:Высшая школа,1967.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ.

Самаров Ш.Ш.

Таджикский технический университет им. М.С. Осими

Точные решения задачи нестационарной теплопроводности после применения интегрального преобразования Лапласа для пластины, цилиндра и шара и переход в область оригиналов для конкретных видов входных функций температурных возмущений приводятся в [5]. Эти решения для пластины и шара выражаются через функциональные ряды по синусам и косинусам, а для цилиндра-через ряды по функциям Бесселя. Такой подход к решениям задач теплопроводности позволяет находить температурное поле как элемент функционального пространства, базисом которого является система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Однако даже для одномерных тел классических форм точные решения в явном виде не всегда представимы. Для прикладной теплофизики интерес представляют приближенные методы, которые позволяют находить в простой форме аналитические решения в пределах допустимой точности. К числу таких методов относится применение метода ортогональной проекции невязки.

Целесообразность применения этого метода к классическим телам обусловливается тем, что в теории нестационарной теплопроводности обратный переход к оригиналу по времени tот точного решения задачи является наиболее сложным. Применение метода Бубнова-Галеркина позволяет обойти эти трудности и предложить простой и единый метод перехода в область оригиналов.

В данной работе рассматривается общая идея метода совместного применения интегрального преобразования Лапласа и ортогональной проекции. Исследуется теплопроводность для неограниченного цилиндра эллиптического сечения при различных режимах заданий температуры на поверхности тела.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, линейный оператор,безразмерныекоординаты, цилиндр эллиптического сечения, координатные функции,интегральные преобразования, приближенное решение, преобразование Лапласа.

NONSTATIONARY TEMPERATURE FIELDS INSIDE THE UNLIMITED CYLINDER OF THE ELLIPTIC SECTION.

Samarov Sh.Sh.

Tajik Technical University. M.S. Osimi

Exact solutions to the problem of non-stationary heat conduction after applying the integral Laplace transform for a plate, cylinder and ball and the transition to the domain of originals for specific types of input temperature perturbation functions are given in.

These solutions for the plate and the ball are expressed in terms of sine and cosine functional series, and for a cylinder in terms of Bessel functions. Such an approach to solving heat conduction problems allows us to find the temperature field as an element of the functional space, the basis of which is the system of Eigen functions of the Sturm-Lowville problem. However, even for one-dimensional bodies of classical forms, exact solutions in an explicit form are not always representable. For applied thermal physics, of interest are approximate methods that allow one to find in a simple form analytical solutions within the limits of permissible accuracy. These include the use of the orthogonal projection of the residual.

The expediency of applying this method to classical bodies is due to the fact that in the theory of nonstationary thermal conductivity, the reverse transition to the original in time from the exact problem is the most complex. The use of the Bubnov-Galerkin method makes it possible to circumvent these difficulties and propose a simple and unified method of transition to the area of the originals.
In this given work, we consider the general idea of the method of joint application of the integral Laplace transform and orthogonal projection. Thermal conductivity is studied for an unlimited cylinder of elliptic cross section under various conditions of temperature setting on the body surface.
Key words: Heat equation, linear operator, dimensionless coordinates, cylinder of elliptic section, coordinate functions, integral transforms, approximate solution, Laplace transforms.

Сведения об авторе:

СамаровШамсиддинШарофович - Таджикский технический университет имени академика М.С.Осими, кандидат физико-математический наук, заведующий кафедрой «Гуманитарных и общетехнических наук» БНТУ-ТТУ им. академика М.С.Осими.

***Адрес:**Республика Таджикистан, 119454, г. Душанбе, ул. академиков Раджабовых, 10. E-mail:* samarov58@mail.ru. *Телефон:938672836*