Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(10), 101-107
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1410349

Hans汉斯

q-Abel-Zeilberger算法与*q*-超调和数恒等式

周梦肖

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2024年9月9日；录用日期：2024年10月9日；发布日期：2024年10月15日

摘　要

本文将Abel引理与*q*-Zeilberger算法相结合来研究*q*-非超几何和式。对一类含有*q*-超调和数的相关和式，得到了一些新的*q*-模拟恒等式。

关键词

***q*-超调和数，*q*-Gosper算法，*q*-Zeilberger算法，Abel引理**

q-Abel-Zeilberger Algorithm and *q*-Hyperharmonic Numbers Identities

Mengxiao Zhou

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Sep. 9th, 2024; accepted: Oct. 9th, 2024; published: Oct. 15th, 2024

Abstract

This article combines Abel's lemma with *q*-Zeilberger algorithm to study q-non-hypergeometric sums. For a class of related sum of *q*-hyperharmonic numbers, some new q-analogous identities are obtained.

Keywords

***q*-Hyperharmonic Numbers, *q*-Gosper Algorithm, *q*-Zeilberger Algorithm, Abel's Lemma**

文章引用: 周梦肖. *q*-Abel-Zeilberger 算法与 *q*-超调和数恒等式[J]. 理论数学, 2024, 14(10): 101-107.
DOI: 10.12677/pm.2024.1410349

1. 引言

对于正整数 n，经典调和数的定义为

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \tag{1.1}$$

为了方便，约定 $H_0=0$。近些年来，调和数恒等式的发现与证明受到研究者的广泛关注，相关恒等式可见[1]-[5]。

经典调和数有多种扩展形式。例如，对正整数 n, r，Conway 和 Guy [6]定义了调和数的如下扩展，称为 r 阶超调和数

$$H(n,r)=\sum_{t=1}^{n}H(t,r-1), \tag{1.2}$$

其中 $H(n,0)=\frac{1}{n}$。同理，约定当 $n\le 0$ 或 $r<0$ 时，有 $H(n,r)=0$。

本论文主要研究 q-调和数(即调和数的 q-模拟)的相关恒等式。恒等式的 q-模拟及其组合证明是组合数学的研究热点，它的快速发展对理论物理学，计算机科学的发展起到了重要的推动作用。

定义 1 对于正整数 n，两种常见的 q-调和数定义如下[7]：

$$H_q(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[k]},\quad \tilde{H}_q(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{[k]}. \tag{1.3}$$

其中 $[k]=\frac{1-q^k}{1-q}$，同时约定 $H_q(0)=\tilde{H}_q(0)=0$，注意当 $q\to 1$ 时，$[k]\to k$。

Mansour 和 Shattuck [8]给出了如下的 q-超调和数。

定义 2 对正整数 n, r，r 阶 q-超调和数定义为

$$H_q(n,r)=\sum_{t=1}^{n}q^tH_q(t,r-1), \tag{1.4}$$

其中 $H_q(n,0)=\frac{1}{q[n]}$，$H_q(n,1)=\frac{1}{q}\tilde{H}_q(n)$.

定义 3 q-二项式系数 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ 定义如下：

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}, \tag{1.5}$$

其中 $(a;q)_n=(1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1})$，约定 $(a;q)_0=1$。

注意当 $k>n$ 或 $k<0$ 时，$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=0$。

给定一个恒等式，寻找其 q-模拟恒等式是十分重要的。例如，对超调和数恒等式：

$$\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k}{m}H(k,2)=\binom{n}{m+1}H(n,2)-\binom{n+1}{m+2}\left(H_{n+1}-\frac{1}{m+2}\right),\quad n\ge 1. \tag{1.6}$$

有如下 q-模拟恒等式[9]

$$\sum_{k=m}^{n-1}q^{k-m}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}H_q(k,2)=\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}H_q(n,2)-q^{m+1}\begin{bmatrix}n+1\\m+2\end{bmatrix}\left(H_q(n+1,1)-\frac{q^{m+1}}{[m+2]}\right),\quad n\ge 1. \tag{1.7}$$

目前，对超几何和式，可采用经典的超几何算法(如 Gosper 算法和 Zeilberger 算法)进行处理。注意到调和数及 q-调和数是非超几何项，因此相关和式需采用其他方法。例如，Chen，Hou 和 Jin [10]将 Abel 引理与 Gosper 算法，Zeilberger 算法相结合，提出了 Abel-Zeilberger 算法并给出了大量调和数相关恒等式的新证明。Xu [11]和 Chu [12]等将 Abel 引理用于研究 q-级数相关等式。沿着该思路，本文将 Abel 引理与 q-Zeilberger 算法相结合(称为 q-Abel-Zeilberger 算法)来研究含有 q-非超几何项的相关和式。特别是，对如下和式的 q-模拟，得到了相关 q-恒等式。

$$S(n,m,r)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}k^{m}H(k,r). \tag{1.8}$$

2. 基础知识

引理 2.1 (Abel 引理)对于两个任意的序列 $\{a_k\},\{b_k\}$，有

$$\sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k=\sum_{k=m}^{n-1}a_{k+1}(b_k-b_{k+1})+a_nb_n-a_mb_m. \tag{2.1}$$

利用差分算子可将上式改写为

$$\sum_{k=m}^{n-1}b_k\Delta a_k=-\sum_{k=m}^{n-1}a_{k+1}\Delta b_k+a_nb_n-a_mb_m. \tag{2.2}$$

注： Δ 是关于 k 的差分算子。

Zeilberger 算法用来处理定和问题。给定一个 q-超几何项 $F(n,k)$，其中 $\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}$ 都是关于 q^n,q^k 的有理函数， q-Zeilberger 试着求出多项式 $a_0(q^n),\cdots,a_d(q^n)$ 和有理函数 $R(q^n,q^k)$，使得

$$a_0(q^n)F(n,k)+a_1(q^n)F(n+1,k)\cdots+a_d(q^n)F(n+d,k)=\Delta R(q^n,q^k)F(n,k). \tag{2.3}$$

对该斜递推关系关于 k 求和，就可得到如下和式的递推关系

$$S(n)=\sum_{k}F(n,k). \tag{2.4}$$

有关超几何算法的更多细节，可见参考文献[13]。

对给定和式 $S(n)=\sum_{k}F(n,k)b_k$，其中 $F(n,k)$ 和 Δb_k 均是 q-超几何项，q-Abel-Zeilberger 算法的基本步骤如下：

1) 对超几何项 $F(n,k)$，利用 q-Gosper 算法或 q-Zeilberger 算法得到其不定和或斜递推关系。

$$a_0(q^n)F(n,k)+a_1(q^n)F(n+1,k)+\cdots+a_d(q^n)F(n+d,k)=\Delta G(n,k), \tag{2.5}$$

其中 $G(n,k)=R(q^n,q^k)F(n,k)$.

2) 在上述关系式两端同乘 b_k 并对变量 k 求和，得到

$$a_0(q^n)S(n)+a_1(q^n)S(n+1)+\cdots+a_d(q^n)S(n+d)=\sum_{k}\Delta G(n,k)b_k. \tag{2.6}$$

3) 对等式右端利用 Abel 引理可得

$$a_0(q^n)S(n)+a_1(q^n)S(n+1)+\cdots+a_d(q^n)S(n+d)=-\sum_{k}G(n,k+1)\Delta b_k+W(n). \tag{2.7}$$

注意到由于 Δb_k 为 q-超几何项，因此右端和式由 q-非超几何和式转化为 q-超几何和式。此外，多数情况下，余项 $W(n)=0$。

4) 令 $T(n)=\sum_k G(n,k+1)\Delta b_k$，若可利用 q-Zeilberger 算法找到 $T(n)$ 的闭形式，则可得到 $S(n)$ 满足的递推关系。

3. 主要结论

对如下和式：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m H_k^{(p)}.$$

对给定参数 (n,m,p)，该和式的对应恒等式已被多人发现和证明。本文将上式中广义调和数 $H_k^{(p)}$，替换为超调和数 $H(k,r)$，研究下列和式的 q-模拟恒等式。

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^m H(k,r).$$

定理 3.1 对于非负整数 m，n 且 $n>m+1$，有

$$S_q(n,m,2)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}H_q(k,2)=\frac{(-1)^m q^{-\binom{m+1}{2}+n-m-2}\left(1-q^{m+1}\right)}{[n-m]\left(1-q^{n-m-1}\right)}. \tag{3.1}$$

证明. 令

$$F(n,k)=(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

则由 q-Gosper 算法可知

$$F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k), \tag{3.3}$$

其中

$$G(n,k)=-\frac{q^n\left(q^m-q^k\right)}{q^k\left(q^m-q^n\right)}F(n,k). \tag{3.4}$$

注意到求和范围等价于从 0 到 $+\infty$，因此对(3.3)式两边同乘 $H_q(k,2)$ 并对 k 从 0 到 $+\infty$ 求和，利用 Abel 引理可得(注意其余项为零)

$$\begin{aligned}S_q(n,m,2)&=\sum_{k=0}^{n}\Delta G(n,k)H_q(k,2)\\&=-\sum_{k=0}^{+\infty}G(n,k+1)q^k\tilde{H}_q(k+1)\\&=-T(n).\end{aligned} \tag{3.5}$$

令

$$F_1(n,k)=G(n,k+1)q^k. \tag{3.6}$$

则由 q-Gosper 算法可知

$$F_1(n,k)=G_1(n,k+1)-G_1(n,k). \tag{3.7}$$

其中

$$G_1(n,k)=-\frac{q^n\left(q^m-q^k\right)}{\left(q^{m+1}-q^n\right)q^k}F_1(n,k). \tag{3.8}$$

注意到求和范围等价于从 0 到 $+\infty$ 求，因此对(3.7)式两边同乘 $\tilde{H}_q(k+1)$ 并对 k 从 0 到 $+\infty$ 求和，进一步利用 Abel 引理可得(注意其余项为零)

$$\begin{aligned} T(n)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\Delta G_1(n,k)\tilde{H}_q(k+1)\\ &=-\sum_{k=0}^{+\infty}G_1(n,k+1)\frac{(1-q)q^{k+2}}{1-q^{k+2}}\\ &=-Z(n). \end{aligned} \tag{3.9}$$

设

$$F_2(n,k)=G_1(n,k+1)\frac{(1-q)q^{k+2}}{1-q^{k+2}}, \tag{3.10}$$

由 q-Zeilberger 算法可知

$$\left(q^{m+1}-q^n\right)F_2(n,k)-\left(q^m-q^{n+1}\right)F_2(n+1,k)=G_2(n,k+1)-G_2(n,k). \tag{3.11}$$

其中

$$G_2(n,k)=-\frac{q^n\left(q^{k+2}-1\right)\left(q^m-q^k\right)}{q^{k+1}\left(q^{k+1}-q^n\right)}F_2(n,k). \tag{3.12}$$

对(3.11)式两边 k 从 0 到 $+\infty$ 求和，得到

$$\left(q^{m+1}-q^n\right)Z(n)-\left(q^m-q^{n+1}\right)Z(n+1)=0. \tag{313}$$

由初始值

$$Z(m+2)=\frac{(-1)^m q^{-\binom{m+1}{2}}\left(q^{m+1}-1\right)}{q^2-1}, \tag{3.14}$$

得

$$S_q(n,m,2)=Z(n)=\frac{(-1)^m q^{-\binom{m+1}{2}+n-m-2}\left(1-q^{m+1}\right)}{[n-m]\left(1-q^{n-m-1}\right)}. \tag{3.15}$$

特别的，当 $m=0,1,2$，可以得到

$$1=\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix},\quad [k]=\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix},\quad [k]^2=\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}+q(q+1)\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}H_q(k,2)=\frac{q^{n-2}}{[n][n-1]},\quad n>1, \tag{3.17}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}[k]\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}H_q(k,2)=-\frac{q^{n-4}(1+q)}{[n-1][n-2]},\quad n>2, \tag{3.18}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}[k]^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}H_q(k,2)=\frac{(1+q)\left(-q^{2n+1}-q^{2n}+q^{n+1}+q^n\right)}{(1-q)q^6[n-1][n-2][n-3]},\quad n>3. \tag{3.19}$$

运用同样的方法，可以得到下列 q-模拟恒等式

定理 3.2 对于非负整数 m,n 且 $n>m+2$，有

$$S_q(n,m,3)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}H_q(k,3)=\frac{(-1)^{m+1}q^{-\binom{m+1}{2}+2n-2m-4}[m+1][m+2]}{[n-m][n-m-1][n-m-2]}. \tag{3.20}$$

特别的，当 $m=0,1,2$，可以得到

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}H_q(k,3)=-\frac{q^{2n-4}(1+q)}{[n][n-1][n-2]},\ n>3, \tag{3.21}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}[k]\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}H_q(k,3)=\frac{q^{2n-7}(1+q)\left(1+q+q^2\right)}{[n-1][n-2][n-3]},\quad n>4, \tag{3.22}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}-n(k+1)}[k]^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}H_q(k,3)=-\frac{q^{2n-10}(1+q)\left(1+q+q^2\right)^2[n]}{[n-1][n-2][n-3][n-4]},\quad n>5. \tag{3.23}$$

4. 总结

对给定和式 $S(n)=\sum_k F(n,k)b_k$，其中 $F(n,k)$ 和 Δb_k 均是 q-超几何项，本文将 Abel 引理与 q-Zeilberger 算法相结合(称为 q-Abel-Zeilberger 算法)来得到 $S(n)$ 满足的递推关系，进而证明或发现恒等式。特别的，对超调和数，我们得到了如下和式的 q-模拟恒等式。

$$S(n,m,r)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^m H(k,r),\quad r=1,2.$$

注意到该算法的适用性，未来可以进一步考虑其在 q-无穷级数和其他 q-非超几何和式等方面的应用。

参考文献

[1] Boyadzhiev, K.N. (2014) Binomial Transform and the Backward Difference. *Mathematics*, **13**, 43-63.

[2] Chen, K. and Chen, Y. (2020) Infinite Series Containing Generalized Harmonic Functions. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **26**, 85-104. https://doi.org/10.7546/nntdm.2020.26.2.85-104

[3] Chu, W. and De Donno, L. (2005) Hypergeometric Series and Harmonic Number Identities. *Advances in Applied Mathematics*, **34**, 123-137. https://doi.org/10.1016/j.aam.2004.05.003

[4] Frontczak, R. (2021) Binomial Sums with Skew-Harmonic Numbers. *Palestine Journal of Mathematics*, **10**, 756-763.

[5] Guo, D.W. (2022) Some Combinatorial Identities Concerning Harmonic Numbers and Binomial Coefficients. *Discrete Mathematics Letters*, **8**, 41-48.

[6] Conway, J.H. and Guy, R.K. (1996) The Book of Numbers. Copernicus.

[7] Mansour, T., Mansour, M. and Song, C.W. (2012) q-Analogs of Identities Involving Harmonic Numbers and Binomial Coefficients. *Applications and Applied Mathematics*, **7**, 22-36.

[8] Mansour, T. and Shattuck, M. (2012) A q-Analog of the Hyperharmonic Numbers. *Afrika Matematika*, **25**, 147-160. https://doi.org/10.1007/s13370-012-0106-6

[9] Kızılates, C. and Tuğlu, N. (2015) Some Combinatorial Identities of q-Harmonic and q-Hyperharmonic Numbers. *Communications in Mathematics and Applications*, **6**, 33-40.

[10] Chen, W.Y.C., Hou, Q. and Jin, H. (2011) The Abel-Zeilberger Algorithm. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **18**, Article No. 17. https://doi.org/10.37236/2013

[11] Xu, J. and Ma, X. (2024) General q -Series Transformations Based on Abel's Lemma on Summation by Parts and Their Applications. *Journal of Difference Equations and Applications*, **30**, 553-576. https://doi.org/10.1080/10236198.2024.2302379

[12] Chu, W. and Wang, C. (2009) Abel's Lemma on Summation by Parts and Partial Q-Series Transformations. *Science in China Series A: Mathematics*, **52**, 720-748. https://doi.org/10.1007/s11425-008-0173-1

[13] Petkovšek, M., Wilf, H.S. and Zeilberger, D. (1996) A = B. A.K. Peters Ltd.