

楕円偏光アンジュレータ放射の位相構造

PHASE STRUCTURE OF ELLIPTICALLY POLARIZED UNDULATOR LIGHT

平義隆^{#, A)}, 藤本将輝^{B)}, 李志遠^{A)}, 保坂将人^{C)}, 加藤政博^{D, B)}

Yoshitaka Taira^{#, A)}, Masaki Fujimoto^{B)}, Shien Ri^{A)}, Masahito Hosaka^{C)}, Masahiro Katoh^{D, B)}

^{A)} National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST)

^{B)} Institute for Molecular Science

^{C)} Nagoya University

^{D)} Hiroshima University

Abstract

Higher harmonic radiation emitted from a free electron moving on a circular trajectory forms a helical wavefront and carries an orbital angular momentum. Here, we investigate the phase structure of radiation emitted from an electron moving on an elliptical and a linear trajectory. These electron motions can be induced by an elliptically polarized undulator and an elliptically polarized laser field.

1. はじめに

光がもつ角運動量には 2 種類ある。1 つはスピン角運動量であり、光の偏光に起因する。もう 1 つは軌道角運動量と呼ばれ、光の位相構造に起因する。光の一部にらせん転移をもつ光は光渦と呼ばれ、らせん状の位相構造を形成することが知られている[1]。この光渦の応用研究は情報通信[2]、イメージング[3]、光ピンセット[4]、ナノ加工[5]、量子もつれ[6]、不確定原理[7]、天体物理[8]など様々な研究へ波及している。

光渦の発生には、通常、特殊な光学素子が利用されるが、自由電子から放射される光にもらせん波面を形成する光がある。自由電子から光渦が発生するためには、横方向の電子軌道が重要な役割を果たす。円軌道上を運動する電子から放射される高次高調波がらせん波面を形成することは、加藤らによって明らかにされた[9]。電子の円軌道は、ヘリカルアンジュレータ[10-15]や非線形逆トムソン散乱[16-18]、電子サイクロトロン放射[19]によって誘起される。また、円軌道に限らずサイクロイド軌道を描く電子からの放射もらせん波面になることも明らかになっている[18]。しかし、楕円軌道や直線軌道を描く電子からの放射がどのような位相構造を持つのかはこれまで調べられていない。

本論文では、楕円偏光アンジュレータの場合についてその放射の理論式を導出し、楕円偏光の場合においても位相構造をもつ光が発生することを理論的に示す。

2. 理論式の導出

2.1 楕円偏光アンジュレータの磁場

ここでは、楕円偏光アンジュレータに Apple-II アンジュレータの軸上磁場の理論式を用いて計算する[20]。磁場は下記の式で表記される。電子は z 軸に沿って運動するとする。

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} -B_0 \sin \frac{D}{2} \cos \left(k_u z + \frac{D}{2} \right), \\ B_0 \cos \frac{D}{2} \sin \left(k_u z + \frac{D}{2} \right), \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 D はアンジュレータ位相([20]の Fig. 1 参照)、 $k_u = \lambda_u/2\pi$ と λ_u はそれぞれアンジュレータ磁場の波数と波長、Equation (1)から、 $D = \pm 0.5\pi$ のときアンジュレータは円偏光になり、 $0 < |D| < 0.5\pi$ のとき楕円偏光、 $D = 0$ のとき直線偏光になることが分かる。 B_0 は直線偏光のときの最大磁場強度を表す。

2.2 電子軌道

Equation (1)を用いてローレンツ力による電子の運動方程式を解くことで電子軌道が下記のように導出できる。

$$\mathbf{r}(t) = \begin{Bmatrix} -\frac{K_x c}{\gamma \omega_u} \sin \left(\omega_u t + \frac{D}{2} \right), \\ \frac{K_y c}{\gamma \omega_u} \cos \left(\omega_u t + \frac{D}{2} \right), \\ \langle \beta_z \rangle ct - \frac{K_x^2 - K_y^2}{8\gamma^2 \omega_u} c \sin(2\omega_u t + D) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $K_x = K \cos(D/2)$ 、 $K_y = -K \sin(D/2)$ 、 $K = eB_0/(m_e c k_u)$ 、 e は素電荷、 m_e は電子の質量、 c は光速、 γ は電子のローレンツ因子、 $\omega_u = k_u c$ 、 t は時間、 $\langle \beta_z \rangle = 1 - (2+K^2)/(4\gamma^2)$ である。

Equation (2)から、観測面にいる観測者が向かってくる電子を観察すると、円偏光で D が負(正)のとき、電子は反時計(時計)周りに回転しながら z 軸方向に運動し、 $D = 0$ のとき、 x 軸に沿って振動しながら z 軸方向に進むことが分かる。電子が反時計(時計)周りに運動する場合を

yoshitaka-taira@aist.go.jp

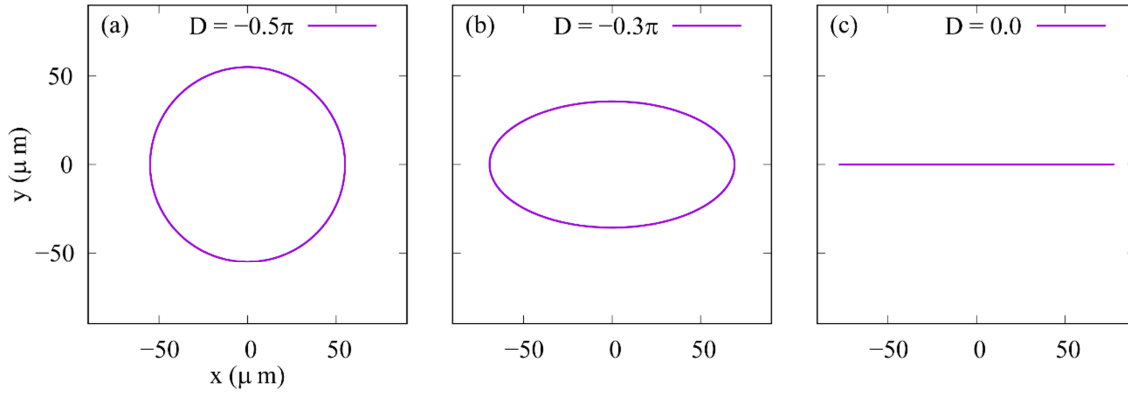


Figure 1: Transverse electron trajectories for different polarization of an Apple-II undulator indicated by the undulator phase D . The calculation parameters are $\gamma = 900$, $K = 5$, and $\lambda_u = 88$ mm.

positive (negative) helicity と呼ぶ。Figure 1 に電子軌道を x - y 平面に投影した図を示す。 $D = \pm 0.5\pi$ のとき、軌道は円軌道を描き、 $0 < |D| < 0.5\pi$ のとき楕円軌道、 $D = 0$ のとき直線軌道を描くことが分かる。

2.3 放射電場

任意の軌道を描く電子からの放射はリエナールヴィーヘルトポテンシャルから計算でき、放射電場ベクトルは下記の式で表現される[21]。

$$\mathbf{E} = -i \sqrt{\frac{e^2 k^2}{32\pi^3 \epsilon_0^2}} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} dt \{ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \} e^{ik(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} \quad (3)$$

ここで、 $k = \omega/c$ と ω は放射の波数と角周波数、 ϵ_0 は真空の誘電率、 R と \mathbf{n} は原点から観測点までの距離と単位ベクトル、 $\boldsymbol{\beta}$ は電子の規格化速度ベクトルである。Equation (3) に Eq. (2) の電子軌道を代入し、球面座標系で計算すると、下記のようになる。

$$E_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e\omega N}{\sqrt{32\pi\epsilon_0 R c \omega_u}} \exp\left\{ ikR - in\alpha + i(n-2s)\zeta + i\left(\frac{\omega}{\omega_1} - n\right)\pi N \right\} \right. \\ \left. \times \sin\left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_1} - n\right)\pi N \right\} \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_1} - n\right)\pi N \right\}^{-1} \right. \\ \left. \times \left[\begin{array}{l} -i\frac{K_x}{\gamma} \cos\theta \cos\phi(J_{n+1} + J_{n-1}) - \frac{K_y}{\gamma} \cos\theta \sin\phi(J_{n+1} - J_{n-1}) \\ -i2\langle\beta_z\rangle \sin\theta J_n + i\frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2} \sin\theta(J_{n+2} + J_{n-2}) \end{array} \right] \right] \quad (4)$$

$$E_\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e\omega N}{\sqrt{32\pi\epsilon_0 R c \omega_u}} \exp\left\{ ikR - in\alpha + i(n-2s)\zeta + i\left(\frac{\omega}{\omega_1} - n\right)\pi N \right\} \right. \\ \left. \times \sin\left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_1} - n\right)\pi N \right\} \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_1} - n\right)\pi N \right\}^{-1} \right. \\ \left. \times \left[\begin{array}{l} i\frac{K_x}{\gamma} \sin\phi(J_{n+1} + J_{n-1}) - \frac{K_y}{\gamma} \cos\phi(J_{n+1} - J_{n-1}) \end{array} \right] \right] \quad (5)$$

ここで、 N はアンジュレータ磁場の周期数、 $J_{n+\mu} = J_{n+\mu, 2s}(b_1)J_s(b_2)\exp(i\mu\zeta)$ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$)、 $b_1 = -\omega \sin\theta \sqrt{(K_y^2 \sin^2\phi + K_x^2 \cos^2\phi)/(\gamma\omega_u)}$ 、 $b_2 = (K_y^2 - K_x^2)\omega \cos\theta / (8\gamma^2\omega_u)$ 、 n と s は整数、 $J_n()$ は第 1 種ベッセル関数、 $\zeta = \tan^{-1}(\tan\phi K_y/K_x)$ 、

$$\omega_l(\theta) = \frac{\omega_u}{g} = \frac{\omega_u}{1 - \langle\beta_z\rangle \cos\theta} \\ \approx \frac{2\gamma^2 \omega_u}{1 + \gamma^2 \theta^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \quad (6)$$

である。Equations (4)-(5) から計算できる電場強度 $|\mathbf{E}|^2$ は、 $\omega = n\omega_l$ のときに鋭いピークを示すため、 n は高調波次数を意味する。Equations (4)-(5) を導出するにあたって、三角関数の合成公式

$$A \sin\eta - B \cos\eta = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\eta - \zeta) \quad (7)$$

を用いた。ここで、 $\tan\zeta = B/A$ である。

放射の位相構造を表すため、Eqs (4)-(5) を下記のように円偏光ベクトルを用いた式に変換する。

$$\mathbf{E} = E_+ \mathbf{e}_+ + E_- \mathbf{e}_- \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{e}_\pm \equiv (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ であり、positive helicity と negative helicity の円偏光単位ベクトルを表す。

2.4 位相構造と角運動量

軌道角運動量密度の z 成分は下記のように表記できる[22]。

$$L_z^\pm = \hbar \Im \left(E_\pm^* \frac{\partial E_\pm}{\partial \phi} \right) \\ = \hbar \left\{ \Re(E_\pm) \frac{\partial \Im(E_\pm)}{\partial \phi} - \Im(E_\pm) \frac{\partial \Re(E_\pm)}{\partial \phi} \right\} \quad (9)$$

平均角運動量を下記のように定義する。

$$L_z = \frac{L_z^+ + L_z^-}{|E_+|^2 + |E_-|^2} \quad (10)$$

Equation (9) より、 E_\pm を方位角 ϕ で偏微分しているため、位相構造の変化によって、軌道角運動量の平均値も変化することが分かる。数値計算によって新たに分かったことの要点は下記の 2 点である。

1 点目は、位相構造から計算される平均的な軌道角運動量がアンジュレータ位相 D によって変化する事である。円偏光 ($D = -0.5\pi$) のとき E_+ には $\exp\{i(n-1)\phi\}$ の位相項が現れる。Figures 2(a-b) に示すように、横方向平面内で位相が $2\pi(n-1)$ 変化していることが分かる。したがって、 n 次高調波は、 $(n-1)\hbar$ の軌道角運動量を運ぶ。楕円偏光 ($0 < |D| < 0.5\pi$) のとき、解析的に記述することは難しい

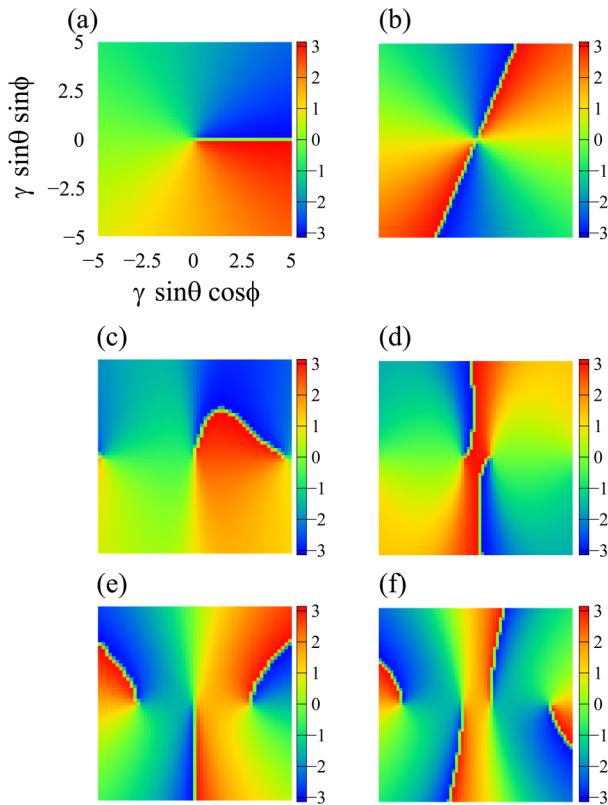


Figure 2: Calculated phase distributions, $\tan^{-1}\{\text{Im}(E_+)/\text{Re}(E_+)\}$. The undulator phase D is (a-b) $D = -0.5\pi$, (c-d) $D = -0.3\pi$, and (e-f) $D = 0$. The harmonic number is (a, c, e) $n = 2$ and (b, d, f) $n = 3$. The calculation parameters are $\gamma = 900$, $K = 4.19$ ($n = 2$) and 5.23 ($n = 3$), and $\lambda_u = 88$ mm.

ため、 $\tan^{-1}\{\text{Im}(E_+)/\text{Re}(E_+)\}$ を計算すると、楕円偏光においてもその放射は位相構造をもつ事が分かる(Figures 2(c-d))。2次高調波のとき、軌道角運動量は0と1の間の値を取る。直線偏光のとき($D = 0$)、軌道角運動量は0になる。軌道角運動量と共に平均スピ角運動量(円偏光度)も変化するため、平均角運動量を任意の値に制御することが可能である。円偏光を用いて円二色性の研究が様々な施設で行われており、円二色性の研究と合わせて光渦に新たな応用法を開拓できる可能性がある。

2点目は、3次以上の高調波の場合、位相特異点が分離することである。3次の高調波は2つの位相特異点をもつため、アンジュレータ位相が円偏光から楕円偏光に変化するときに位相特異点が2つに分離する(Figures 2(b, d, f))。分離した位相特異点は直線偏光に見られる3つのピーク間の位置に移動する。直線偏光のときに n 次の高調波が偏光面に沿って n 個のピークを持つことは良く知られている。このピーク間が位相特異点になっているということが我々の計算によって新たに分かった。直線偏光は右回り円偏光と左回り円偏光の重ね合わせであるため、通常は直線偏光の位相特異点を測定することは難しいが、直線偏光から円偏光成分を取り出すことができれば、ピーク間は位相特異点になることが測定できると考えられる。

3. まとめ

楕円偏光アンジュレータの場合においてもその放射は位相構造を持つことを理論式の導出によって示した。軌道角運動量の平均値はアンジュレータ位相の変化に伴って連続的に変化する。また、3次以上の高調波の位相特異点が楕円偏光では分離し、直線偏光のピークの間が位相特異点になっていることも合わせて示した。

今後は、2重スリットスキャン法による軌道角運動量の測定実験を行い、計算値との比較など詳しい結果を論文に投稿して発表する予定である。

謝辞

本研究は、科研費基盤研究 B(18H03477)と自然科学研究機構若手研究者による分野間連携研究プロジェクト(01311802)の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] L. Allen *et al.*, “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes”, *Physical Review A*, 45, (1992), pp. 8185-8189.
- [2] J. Wang *et al.*, “Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing”, *Nature Photonics*, 6, (2012), pp. 488-496.
- [3] S. Furrer *et al.*, “Spiral interferometry”, *Optics Letters*, 30, (2005), pp. 1953-1955.
- [4] L. Paterson *et al.*, “Controlled Rotation of Optically Trapped Microscopic Particles”, *Science*, 292, (2001), pp. 912-914.
- [5] K. Toyoda *et al.*, “Using Optical Vortex To Control the Chirality of Twisted Metal Nanostructures”, *Nano Letters*, 12, (2012), pp. 3645-3649.
- [6] A. Mair *et al.*, “Entanglement of the orbital angular momentum states of photons”, *Nature*, 412, (2001), pp. 313-316.
- [7] S. Franke-Arnold *et al.*, “Uncertainty principle for angular position and angular momentum”, *New Journal of Physics*, 6, (2004), pp. 103-1-8.
- [8] F. Tamburini *et al.*, “Twisting of light around rotating black holes”, *Nature Physics*, 7, (2011), pp. 195-197.
- [9] M. Katoh *et al.*, “Angular Momentum of Twisted Radiation from an Electron in Spiral Motion”, *Physical Review Letters*, 118, (2017), pp. 094801-1-5.
- [10] S. Sasaki *et al.*, “Proposal for Generating Brilliant X-Ray Beams Carrying Orbital Angular Momentum”, *Physical Review Letters*, 100, (2008), pp. 124801-1-4.
- [11] J. Bahrtdt *et al.*, “First Observation of Photons Carrying Orbital Angular Momentum in Undulator Radiation”, *Physical Review Letters*, 111, (2013), pp. 034801-1-5.
- [12] T. Kaneyasu *et al.*, “Observation of an optical vortex beam from a helical undulator in the XUV region”, *Journal of Synchrotron Radiation*, 24, (2017), pp. 934-1-5.
- [13] M. Katoh *et al.*, “Helical Phase Structure of Radiation from an Electron in Circular Motion”, *Scientific Reports*, 7, (2017), pp. 6130-1-8.
- [14] P. R. Ribic *et al.*, “Extreme-Ultraviolet Vortices from a Free-Electron Laser”, *Physical Review X*, 7, (2017), pp. 031036-1-9.
- [15] S. Matsuba *et al.*, “Generation of vector beam with tandem helical undulators”, *Applied Physics Letters*, 113, (2018), pp. 021106-1-4.
- [16] Y. Taira *et al.*, “Gamma-ray vortices from nonlinear inverse Thomson scattering of circularly polarized light”, *Scientific Reports*, 7, (2017), pp. 5018-1-9.
- [17] Y. Taira *et al.*, “Generation of Optical Vortices by Nonlinear

- Inverse Thomson Scattering at Arbitrary Angle Interactions”,
The Astrophysical Journal, 860, (2018), pp. 45-1-11.
- [18] Y. Taira *et al.*, “Gamma-ray vortices emitted from nonlinear inverse Thomson scattering of a two-wavelength laser beam”,
Physical Review A, 98, (2018), pp. 052130-1-13.
- [19] Y. Goto *et al.*, “Development of the Grating Mirror for the High Power Transmission System and Its General Theory”,
Plasma and Fusion Research, 13, (2018), pp. 3405089-1-4.
- [20] S. Sasaki *et al.*, “Analyses for a planar variably-polarizing undulator”, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 347, (1994), pp. 83-86.
- [21] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics” third edn. (John Wiley and Sons, Inc., 1999).
- [22] F. C. Speirits *et al.*, “Do Waves Carrying Orbital Angular Momentum Possess Azimuthal Linear Momentum?”,
Physical Review Letters, 111, (2013), pp. 103602-1-3.