

2.5 次元PIC シミュレーション における鏡像電流のモデル化

栗本 佳典

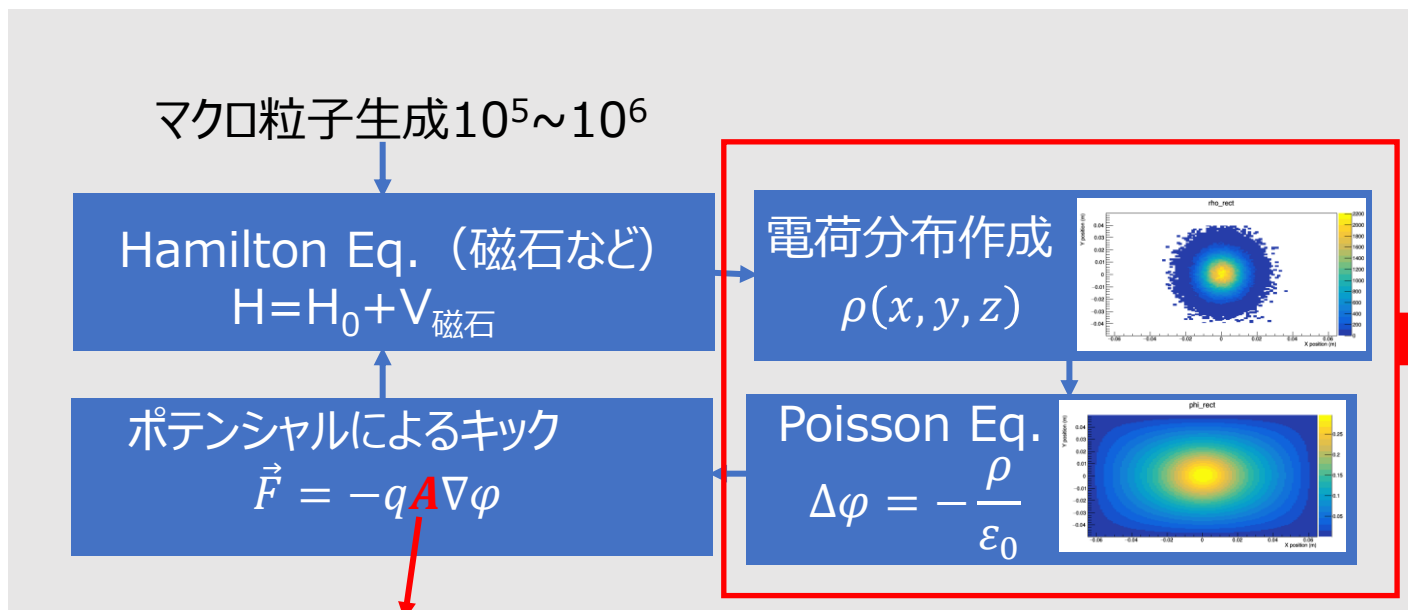
J-PARC Center

もくじ

- 2.5 次元PIC (Pixel-in-Cell) シミュレーション@J-PARC Main Ring
- 陽子バンチが作る電場と磁場のローレンツ力
- コヒーレントチューンシフト
- 新しい鏡像電流のモデルについて
- 多バンチ効果

J-PARC Main Ringで使用している 2.5次元PICシミュレーション

PIC シミュレーションの手順



$$A = \frac{e}{m_p \gamma_p^3 \beta_p^2 c^2}$$

2.5次元近似

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

近似 $\sigma_x, \sigma_y \ll \sigma_z$

$$g(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x, y) = -\frac{g(z)f(x, y)}{\epsilon_0}$$

$$\phi(x, y, z) = g(z)u(x, y)$$

[1] K. Ohmi *et al.*, Proc. PAC'07, doi:10.1109/PAC.2007.4440411

[2] Y. Kurimoto, IEEE TNS doi: 10.1109/TNS.2021.3084214.

二次元の方程式をダクトの電位0の境界条件で解く

係数 $\frac{e}{m_p \gamma_p^3 \beta_p^2 c^2}$ の起源 (1)

2D Approximation ($\sigma_z \gg \sigma_{x,y}$)

電場

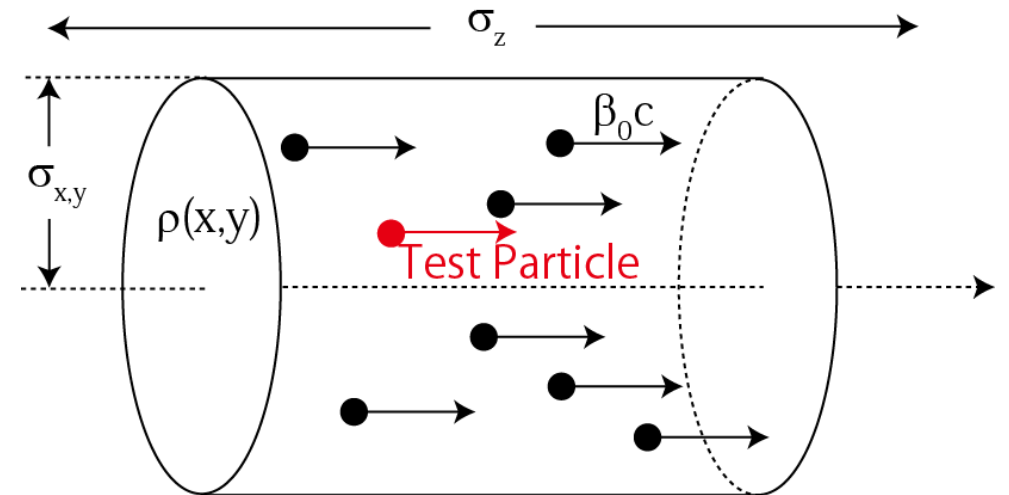
- $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}, \vec{E} = -\text{grad} \varphi_E(x,y)$

➡ $\Delta \varphi_E(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}$

磁場

- $\text{rot} \vec{B} = \frac{i(x,y)}{\epsilon_0 c^2}, \vec{B} = \text{rot} \vec{A}(x,y), i(x,y) = \beta_0 c \rho(x,y)$

➡ $\Delta A_z(x,y) = -\frac{\rho(x,y)\beta_0}{\epsilon_0 c} \rightarrow \Delta \varphi_B(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}$ ($\varphi_B(x,y) = \frac{c}{\beta_0} A_z(x,y)$)
(Using Coulomb Gauge)



自由空間 (ダクトなし) $\varphi_E(x,y)$ と $\varphi_B(x,y)$ 等しい

係数 $\frac{e}{m_p \gamma_p^3 \beta_p^2 c^2}$ の起源 (2)

粒子が電場および磁場から受けるローレンツ力は

$$\vec{F}_E(x, y) = -q \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_E(x, y)$$

$$\vec{F}_B(x, y) = q (0, 0, \beta_0 c) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (0, 0, A_z(x, y)) = -q \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) (-\beta_0^2 \varphi_B(x, y))$$

運動方程式 $\vec{F}(x, y) = \vec{F}_E(x, y) + \vec{F}_B(x, y) = \frac{d}{dt} \vec{P} = P_0 \beta_0 c \frac{d}{ds} (x(s), y(s))$ より、

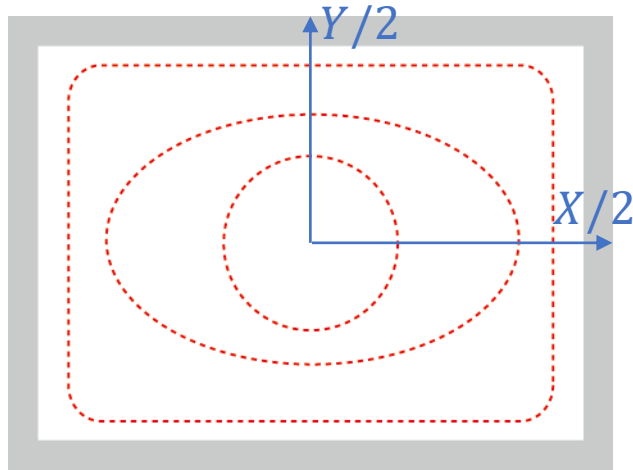
$$\frac{d}{ds} (x(s), y(s)) = -\frac{q}{m \beta_0^2 \gamma_0^3 c^2} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(x, y)$$

係数は $\varphi_E(x, y) = \varphi_B(x, y)$ すなわちダクトなしの時のみ有効

しかし、一般的には電場と磁場で境界条件が違う。したがって、 $\varphi_E(x, y) \neq \varphi_B(x, y)$

ダクトでの境界条件

電場



ダクトでの電位が等しい

$$\varphi_E(\pm X/2, y) = \varphi_E(x, \pm Y/2) = \text{Const.}$$

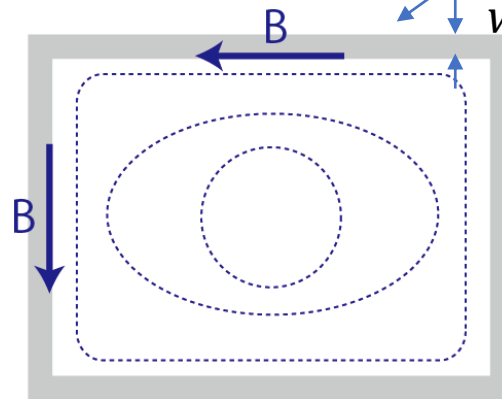
φ_B φ_E は同じポワソン方程式の解となる。(境界条件が同じ)

磁場

Skin depth $\delta \ll$ ダクト厚み w

Yes (速い)

No (遅い)

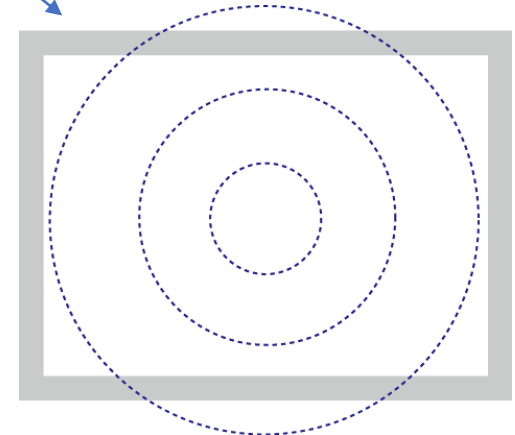


B がダクトと平行

$$B_y \left(x, \pm \frac{Y}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_B \left(x, \pm \frac{Y}{2} \right) = 0$$

$$B_x \left(\pm \frac{X}{2}, y \right) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi_B \left(\pm \frac{X}{2}, y \right) = 0$$

$$\varphi_B(\pm X/2, y) = \varphi_B(x, \pm Y/2) = \text{Const.}$$



$$\varphi_B(\pm\infty) = 0$$

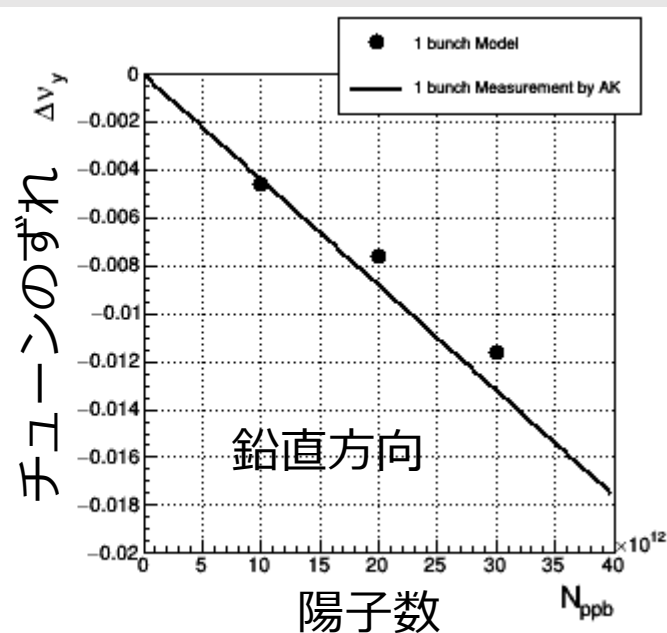
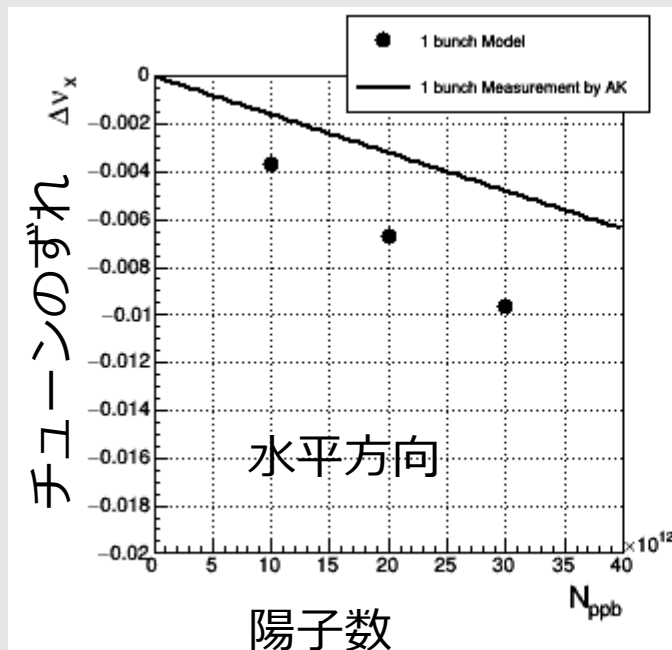
ダクトがないときと同じふるまい
 φ_B と φ_E で境界条件が違う。別々に計算する必要あり

コヒーレントチューンシフト

現行の2.5次元のPICシミュレーションでは、電場、磁場の二次元ポテンシャルを同じ方程式の解としている（ダクトでのポテンシャルがゼロという境界条件）→ **遅い周波数成分を無視した近似**

境界条件（=鏡像電流）を反映する測定可能な量として、**コヒーレントチューンシフト**がある。

コヒーレント振動によるチューンの測定とシミュレーションの比較



点：シミュレーション
線：測定 A. Kobayashi et al., IPAC'19

上手く再現できない。
(Simulation上のダクトの大きさを調整しても)

ダクト断面：
偏向電磁石 $11.5 \times 10 \text{ mm}^2$
その他 $r = 62 \text{ mm}$

本研究の動機

磁場・電場の境界条件の違いをPICシミュレーションにうまく含んで、コヒーレントチューンシフトの測定結果を再現したい。

注：コヒーレントチューンシフトが再現しないからと言って、我々のPICシミュレーションが使えないわけではない。PICシミュレーションでは、ビーム損失の原因の解析に有用であればよい。現時点では、本研究は純粋な興味からくるものである。

(+WORKSHOP SAD2019 の宿題)

AC/DC 分離

空間電荷ポテンシャルに乗する線粒子数密度（縦方向分布）をAC成分とDC成分を分離する。

$$\lambda_{AC}(z) = \lambda(z) - \overline{\lambda(z)}$$
$$\lambda_{DC} = \overline{\lambda(z)} = 1/C$$

提案するポテンシャル

境界条件付きで解いたポアソン
方程式の解

$$\varphi(x, y, z)$$

$$= (\lambda_{DC} + \lambda_{AC}(z))(\varphi_{E,FREE}(x, y) + \varphi_{E,IMAGE}(x, y))$$
 電場

$$+ \lambda_{DC}(-\beta_0^2) \langle \varphi_{E,FREE}(x, y) + \varphi_{POLE,IMAGE}(x, y) \rangle$$
 磁場 (Penetration)

$$+ \lambda_{AC}(z)(-\beta_0^2(\varphi_{E,FREE}(x, y) + \varphi_{E,IMAGE}(x, y)))$$
 磁場 (non-penetration) 1

$$+ \lambda_{DC}(-\beta_0^2(\varphi_{E,FREE}(x, y) + \varphi_{E,IMAGE}(x, y)$$

磁場 (non-penetration) 2

$$- \langle \varphi_{E,FREE}(x, y) + \varphi_{E,IMAGE}(x, y) \rangle))$$

以前のモデルは磁場のpenetrationはない ($\lambda_{DC} = 0$) としている。

磁場 (Penetration)

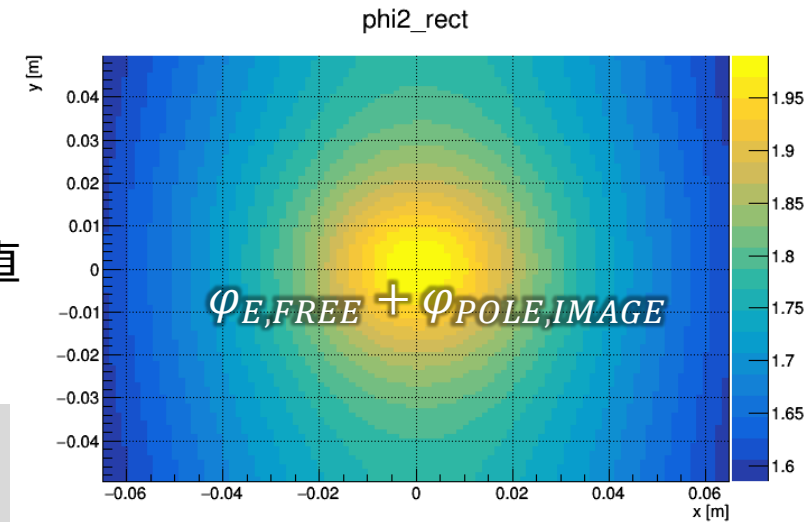
$$+\lambda_{DC}(-\beta_0^2)\langle\varphi_{E,FREE}(x,y) + \varphi_{POLE,IMAGE}(x,y)\rangle$$



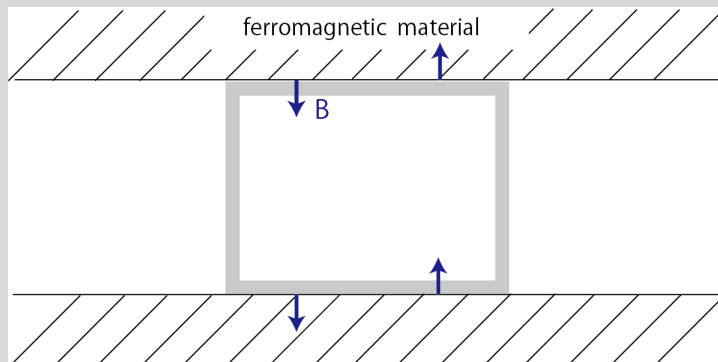
第1項：直流成分なので磁場はダクトから漏れる。



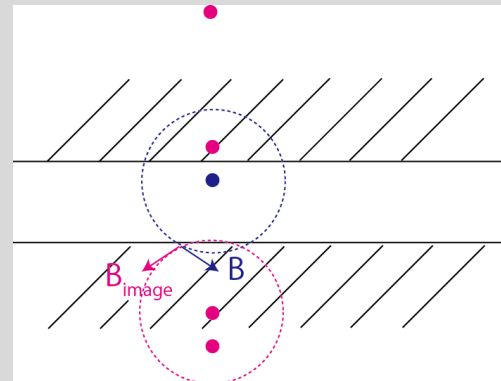
第2項：磁極（強磁性体）がある場合には、磁場が磁極に垂直だという境界条件が入る。 偏向電磁石のみ考慮に入れた。



強磁性体でのDC磁場の境界条件



左の磁場を再現するための鏡像電流



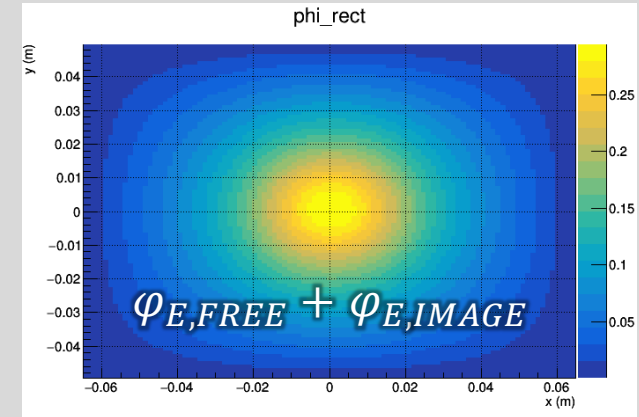
平均<>をとっているのは、チューンを測定するのにビーム重心を振動させる。そのDC成分だけをとるため。

磁場 (Non-Penetration) 1,2

$$+\lambda_{AC}(z)(-\beta_0^2(\varphi_{E,FREE}(x,y) + \varphi_{E,IMAGE}(x,y)))$$

電場と同じ境界条件

ダクト上のポテンシャルが一定
で解けばよい。



$$+\lambda_{DC}(-\beta_0^2(\varphi_{E,FREE}(x,y) + \varphi_{E,IMAGE}(x,y) - \langle \varphi_{E,FREE}(x,y) + \varphi_{E,IMAGE}(x,y) \rangle))$$

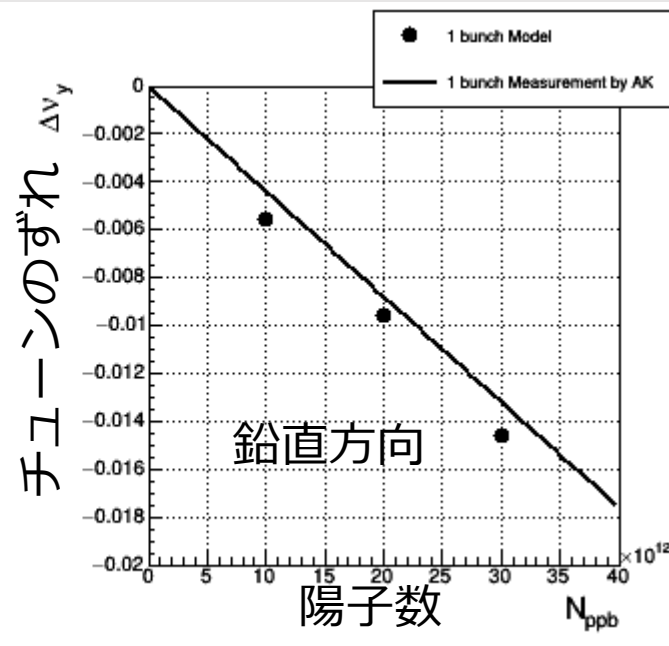
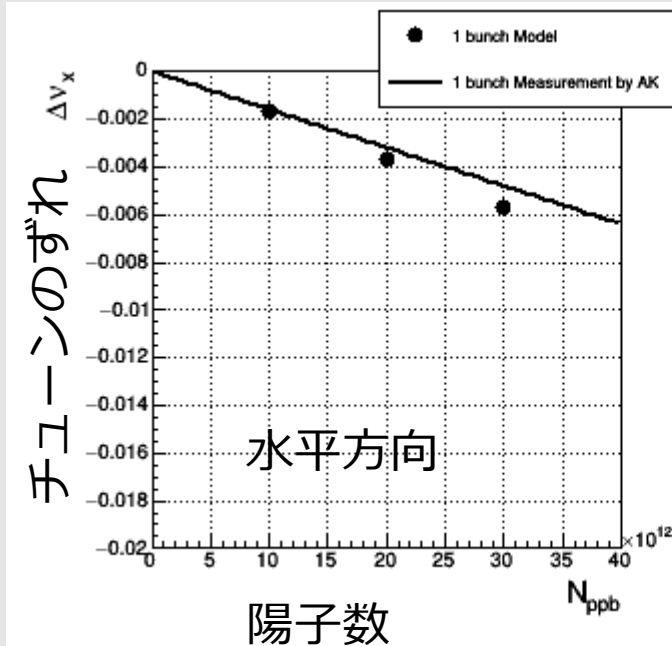
縦方向はDC成分でも、コヒーレント振動させればAC成分が出てくる。

DC成分をカウントしないように平均値で引く。

再びコヒーレントチューンシフト

提案したモデルで再びコヒーレントチューンシフトを計算

コヒーレント振動によるチューンの測定とシミュレーションの比較



点：シミュレーション
線：測定 A. Kobayashi *et al.*, IPAC'19

かなり測定に近づけることができた

ダクト断面：
偏向電磁石11.5x10 mm²
その他 $r = 62$ mm

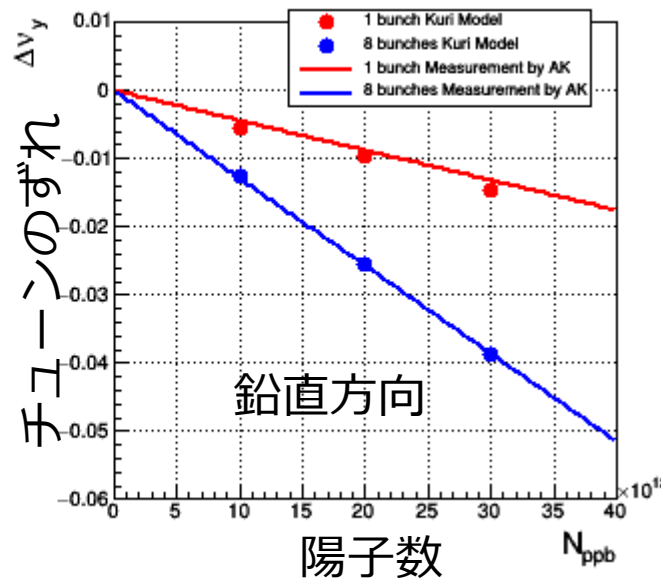
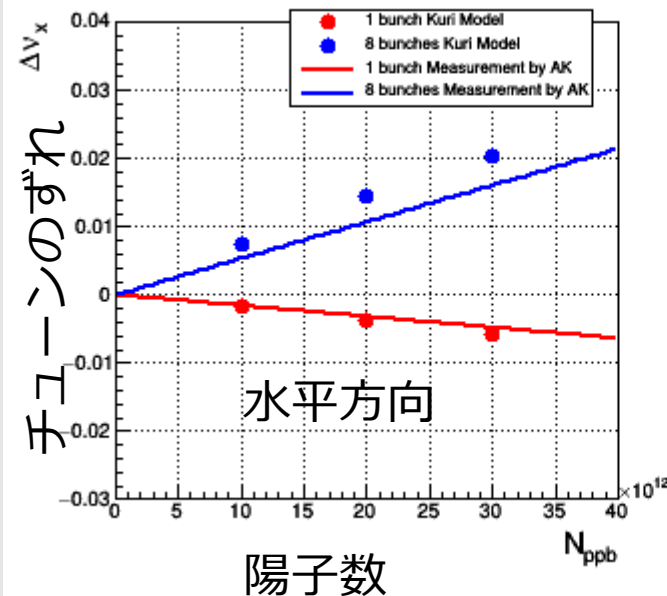
発展 ～マルチバンチ効果～

$$\lambda_{DC} = \overline{\lambda(z)} = N_{bunch}/C$$

新しいモデルでは多バンチ効果も入れることができる。(ことに後で気づいた)

J-PARC Main Ringでは多バンチ効果によるチューンシフトの違いが無視できず、バンチ蓄積中に一部の四極磁場をModulateさせてチューンシフトを補正している。(小林他、加速器学会年会 2018)

コヒーレント振動によるチューンの測定とシミュレーションの比較



点：シミュレーション
線：測定 A. Kobayashi *et al.*, IPAC'19

複数バンチでもそこそこ一致

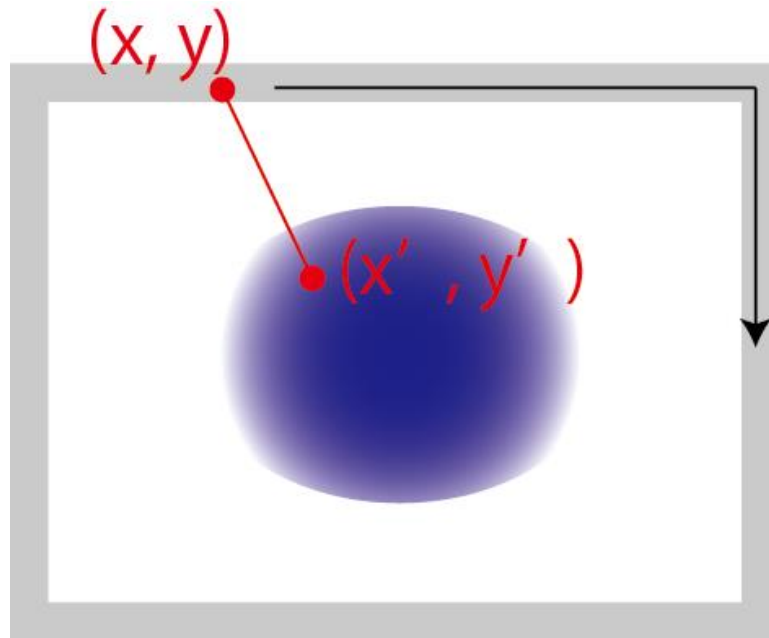
ただし複数バンチだと Resistive Wall Impedance の影響がある可能性があるため、そちらの検討も必要。

まとめと今後

- J-PARC MRのPICシミュレーションで使うため、ビームが作る電場と磁場の効果を別々に取り入れた鏡像電流を含むポテンシャルのモデルを提案した。
- 新しいモデルでコヒーレントチューンシフトをうまく再現することができた。
- 今後は、鏡像電流がビーム損失にどの程度またはどのように影響するのか（ほんとうにこのモデルが必要なのか）調べる
- 多バンチ効果でも一致がよいのが本当かを調べる。Resistive Wall Impedanceなどの影響が小さいか

Free Space 2D Poisson Equation

1. Find potential at the boundary using the Green function*



$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \rho(x', y') \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx' dy'$$

2. Modify the differential equation

$$\frac{u_{0,j} - 2u_{1,j} + u_{2,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{1,j-1} - 2u_{1,j} + u_{1,j+1}}{\Delta y^2} = f_{1,j}$$

↑

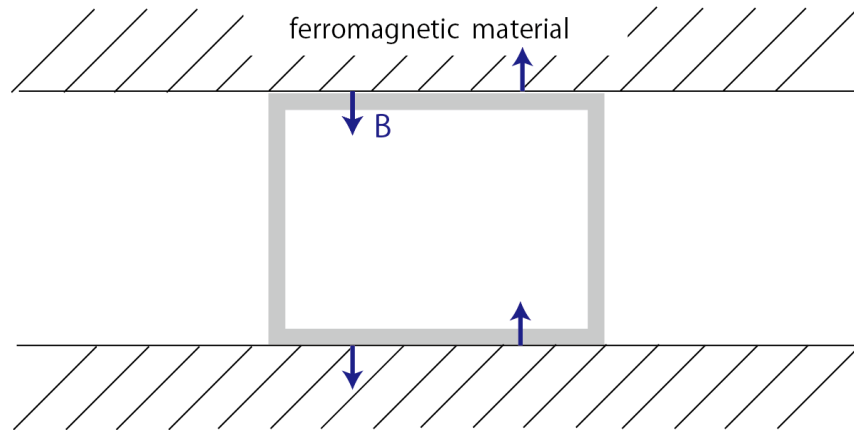
Obtained by the Green function

$$\frac{-2u_{1,j} + u_{2,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{1,j-1} - 2u_{1,j} + u_{1,j+1}}{\Delta y^2} = f_{1,j} - \frac{u_{0,j}}{\Delta x^2}$$

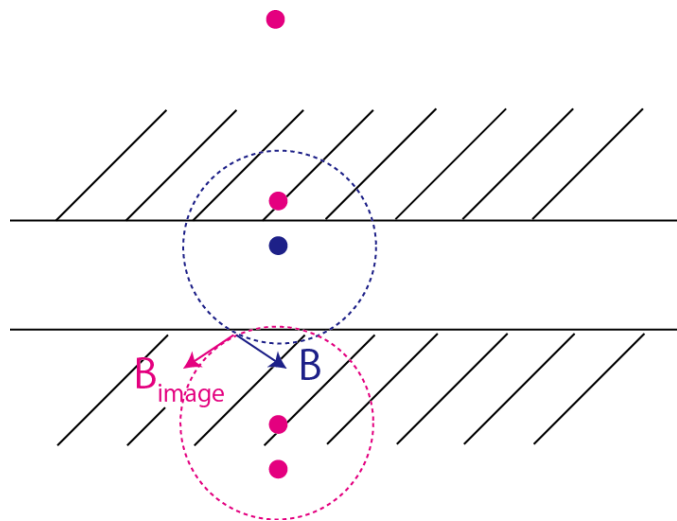
Modifying charge distribution near the boundary

* Calculating whole region using the Green function costs a lot since it needs $O(n^2)$ operations

Boundary with Magnetic Material



- B at the surface of ferromagnetic material must be perpendicular to the surface ($\delta \ll w$)
- **The cores of the BMs touch with all horizontal surface of the duct. (J-PARC MR)**



- Use image current density so that the tangential components of B can be eliminated

$$i_{image}(x, y) = \sum [i(x, (-1)^n y + nY)]$$

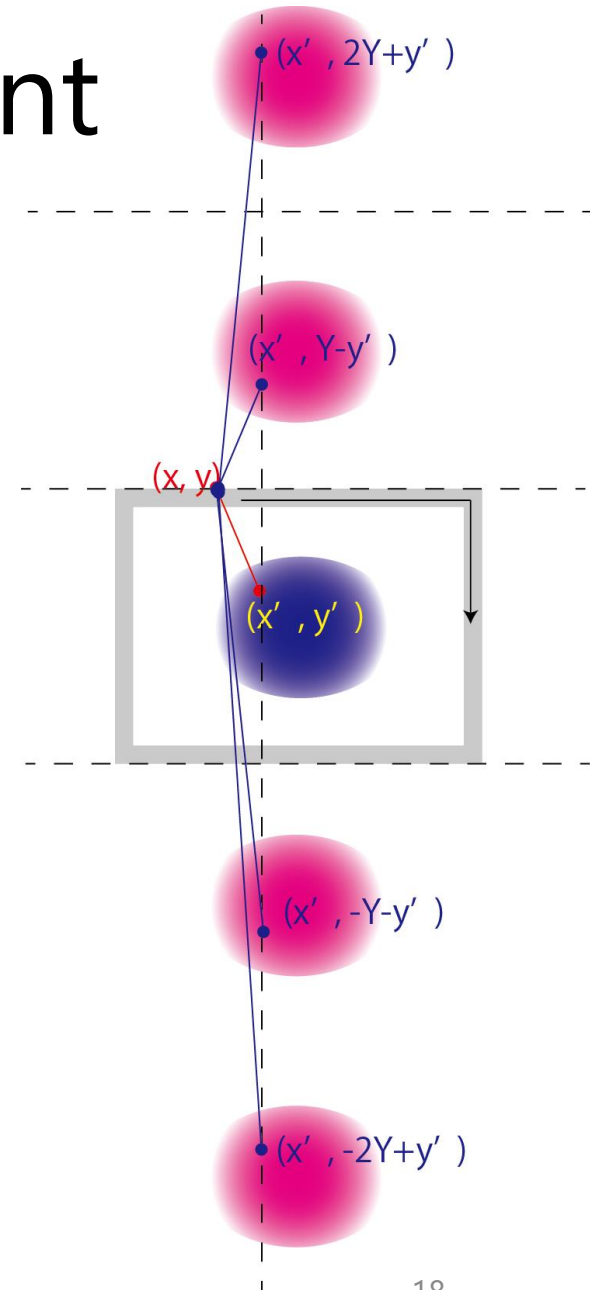
Finding Potential with Image Current

1. Find potential including **image current** at the boundary using the Green function*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int (\rho(x', y') + \rho_{image}(x', y')) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx' dy'$$

$$\rho_{image}(x, y) = \sum [\rho(x, (-1)^n y + nY)]$$

2. Modify the differential equation (same as for free space)

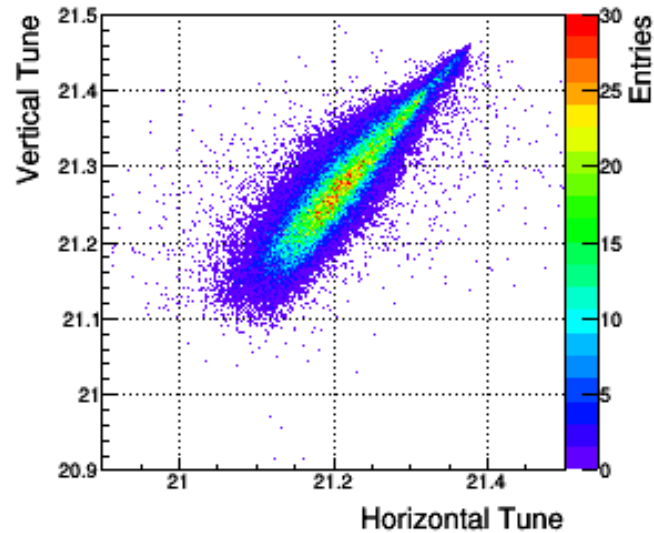


*プロットはすべて前述のGPUシミュレーションによる

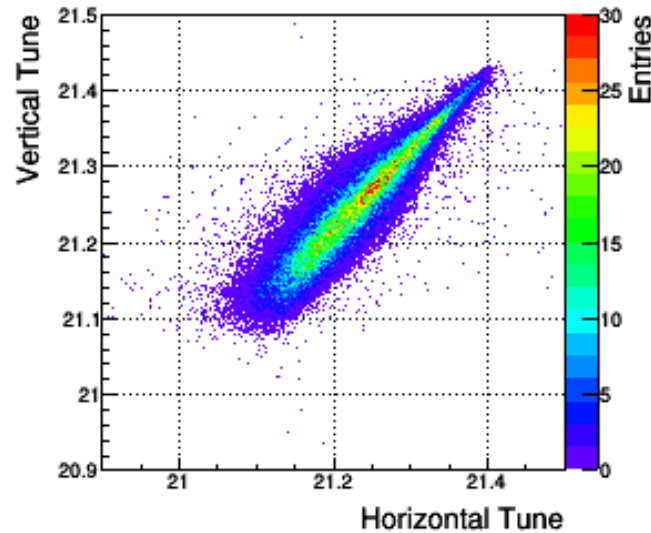
多バンチ効果

境界条件の効果 = 鏡像電荷 → 電磁石のように外力としてチューンを動かす効果がある。

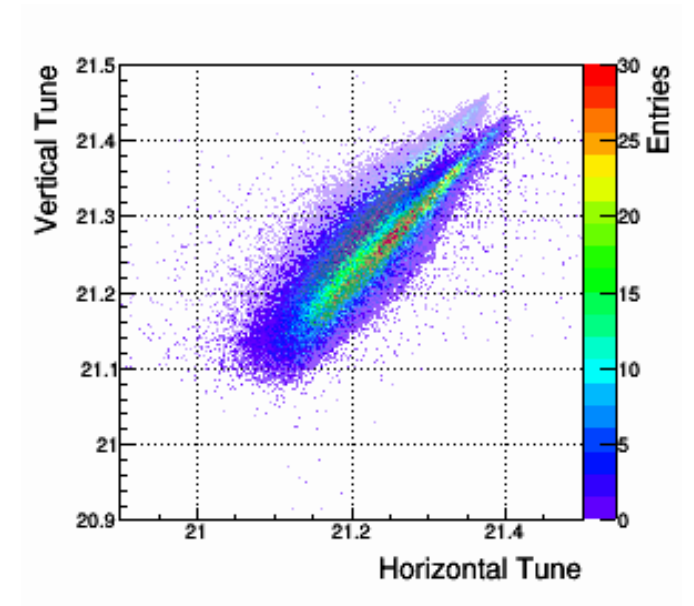
1 bunch



8 bunches



重ねる



現状では、チューンだけを四極電磁石で補正しているが、高次共鳴は他の光学パラメタ $\beta_{x,y}(s), \psi_{x,y}(s)$ にも激しく依存しているので、それを含めて補正する可能性があるのではないか？