

# 簡易 FEL0 コード SIMPLE FEL0 CODE

尾崎俊幸<sup>#</sup>

Toshiyuki Ozaki<sup>#</sup>

Accelerator Facilities, KEK

## Abstract

The evolution of power in FEL0 is usually calculated in the code which the FEL basic equations are integrated step by step in the forward direction. If such a conventional code is used, the tracking simulations for x-ray FEL0 become very severe time-consuming tasks. There is a strong demand for a simpler and faster code. In a textbook on FEL, a small-gain is usually calculated to develop a perturbation expansion of FEL pendulum equations. The perturbation quantity  $\epsilon$  which is proportional to electric field is limited in the region of  $\epsilon \ll 1$ . Here we propose a code adopting approximate equations until second order of  $\epsilon$ . The code show the saturation is caused in the region of around  $\epsilon = 1$ . This paper is arranged as follows. The second section will introduce a theoretical model. Then we will examine three examples: two infrared FEL0s and an XFEL0. We will compare the results of the code with the literatures.

## 1. はじめに

自由電子レーザー(FEL)では、電子ビームと電磁場の相互作用を3元連立1次微分方程式で表し、進行方向に沿って微小間隔のステップで積分する方法が一般的であり、文献[1]のように、共振器型の FEL0 コードは十分に完成している。しかしながら、これで X 線領域の XFEL0 を計算しようとすると、膨大な計算時間と膨大なメモリーを必要とする。したがって、より単純な計算法を求めて、新しいアイデアを求める事は価値がある。

通常、加速器理論では、磁場の中を電子が運動する時、その運動方程式を計算するよりむしろ、ある磁場のエレメントの入口と出口をマトリックスで関係づけてビーム輸送系を設計する。そのほうが、計算時間が早く、理解もしやすい。

本論文では、FEL のアンジュレーターの入出口を級数で結び付ける式を求める。それをローゲインの共振器型 FEL に応用する。この方法で、FEL0 出力飽和も説明できる事を、本論文で示す。この方法が確立できれば、XFEL0 の概算設計が極めて容易になる。本論文で、この近似計算を議論する。

ローゲイン動作の場合は、電場の急激な成長の変化がないので、電場を規格化した量で、運動方程式を摂動展開し、ゲインを求める方法が、多くのテキストで解説されている。本論文は、この方法を拡張する。

本研究の発端は、文献[2]による。そこでは、FEL 基本式(振り子の方程式)の解を、楕円関数を利用した積分式で表すが、本論文では、級数近似で議論する。

本論文の構成は、第2章で提案する方法を説明する。第3章で、文献[2]の例題(赤外線 FEL0)を計算し、結果の比較を行う。第4章は、Mark3 FEL0(ハワイ大学)を文献[3]に沿って議論する。第5章は、文献[2]にもどり、その XFEL0 を議論する。

## 2. 級数によるゲインの計算

基本理論を、文献[3]の 3.2 節の “The Pendulum Equation” と 3.3 節の “Low-Gain Regime” の内容から始める。第 j 番目の電子の運動の基本方程式は

$$\frac{d\theta_j}{dz} = 2k_u \eta_j \quad \frac{d\eta_j}{dz} = -\frac{\epsilon}{2k_u L_u^2} \sin \theta$$

ここで、無次元の電場強度として、以下を定義した。

$$\epsilon = \frac{eE_0 K [JJ]}{\gamma_r^2 mc^2} k_u L_u^2$$

この式は、ハミルトニアン

$$H = k_u \eta^2 - \frac{\epsilon}{2k_u L_u^2} (\cos \theta - 1)$$

から導かれ、位相空間  $(\theta, \eta)$  での粒子の運動を議論する時に有用である。

まず、 $\theta$  と  $\eta$  を、 $\epsilon$  で摂動展開する。

$$\theta_j(z) = \theta_{j0}(z) + \epsilon \theta_{j1}(z) + \epsilon^2 \theta_{j2}(z) + \dots$$

$$\eta_j(z) = \eta_{j0}(z) + \epsilon \eta_{j1}(z) + \epsilon^2 \eta_{j2}(z) + \dots$$

を運動方程式に代入して、 $\epsilon$  の 0次は

$$\frac{d\theta_{0j}}{dz} = 2k_u \eta_{0j} \quad \frac{d\eta_{0j}}{dz} = 0$$

$\epsilon$  の 1次は

$$\frac{d\theta_{1j}}{dz} = 2k_u \eta_{1j} \quad \frac{d\eta_{1j}}{dz} = -\frac{1}{2k_u L_u^2} \sin \theta_{1j}$$

$\epsilon$  の 2次は

$$\frac{d\theta_{2j}}{dz} = 2k_u \eta_{2j} \quad \frac{d\eta_{2j}}{dz} = -\frac{1}{2k_u L_u^2} \theta_{1j} \cos \theta_{0j}$$

等を得る。

0次の解は

$$\theta_{j0}(z) = 2k_u \eta_{j0} z + \phi_0$$

<sup>#</sup> ozaki@post.kek.jp

$$\eta_{j0} = \text{const}$$

であり、これを利用して、1次解は

$$\theta_{j1}(z) = \frac{\sin \theta_{j0} - \sin \phi_0}{(2k_u L_u \eta_0)^2} - \frac{z \cdot \cos \phi_0}{2k_u L_u^2 \eta_0}$$

$$\eta_{j1} = \frac{\cos \theta_{j0}(z) - \cos \phi_0}{4k_u^2 L_u^2 \eta_0}$$

であり、これを利用して2次解は

$$\eta_{j2}(z) = \left[ \frac{A+B}{(2k_u L_u^2)(2k_u L_u \eta_0)^2} + \frac{C}{(2k_u L_u^3)(2k_u L_u \eta_0)} \right]$$

ここで、

$$A = - \int_0^{L_u} dz \cos \theta_{j0} \sin \phi_0$$

$$B = \int_0^{L_u} dz \cos \theta_{j0} \sin \phi_0$$

$$C = \int_0^{L_u} dz (z \cdot \cos \theta_{j0} \cos \phi_0)$$

とした。この積分は容易く、それをコードで用いた。

アンジュレーターでのビームのエネルギー損失の平均値  $\langle \dots \rangle$  は、アンジュレーターの長さを  $L_u$  として、 $\varepsilon$  の0次および1次の項の平均は、ローゲインの場合は、バンチングが進んでいないので、ほぼゼロであり、2次の項のみが残る。

$$\langle \Delta \eta \rangle = \langle \varepsilon^2 \eta_{j2}(L_u) \rangle$$

であり、従って、発生した電磁場電力は、エネルギー保存則から、失った電子エネルギーが電磁場に変換されるので

$$\Delta P = m_e c^2 \gamma \langle \Delta \eta \rangle \frac{I}{ec\beta} \frac{1}{2\pi \Sigma^2}$$

である。ここで、 $2\pi \Sigma^2$  は、電子ビームの断面積である。ゲインを

$$g = \frac{\Delta P}{P_0}$$

とする。 $P_0$  は入力である。

$\varepsilon \ll 1$  の条件で、計算を継続すると

$$g(x) \propto \left( \frac{2 - 2 \cos x - x \sin x}{x^3} \right) \propto - \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2$$

ここで、 $x = k_u \eta L_u$  であり、これは Madey の定理である。

ゲインは、自然放射スペクトルの微分に比例をする。

### 3. 赤外光 FELO

文献[2]で検討された赤外光 FELO のパラメーターを Table 1 に示す。

Table 1: Simulation Parameters for IR-FELO

Parameter	Value	
Beam Energy	80	MeV
Energy Spread	0.2	%
Normalized emittance	10	$\mu$ m-rad
Peak Current	200	A
Electron Bunch Length	0.5	pC
Undulator Period	45	mm
Number of Undulator	16	
Laser Wavelength	1.6	$\mu$ m
Rayleigh length	0.35	m
Cavity loss	1	%
Output coupling efficiency	6	%

#### 3.1 位相空間

ローゲイン FEL の動作を Fig. 1 に示す。電子ビームは、共鳴エネルギーよりも少し高いエネルギーとする。入射ビームにおいて、電磁波の加速位相にある電子は加速され、減速位相の電子は減速され、左図のような分布の電子群となる。さらには中央図のように上下に広がる。さらに進むと、ビームは時計方向に回転を始める。バケットに取り込まれ、右図のように、分布の状況を変えていく。

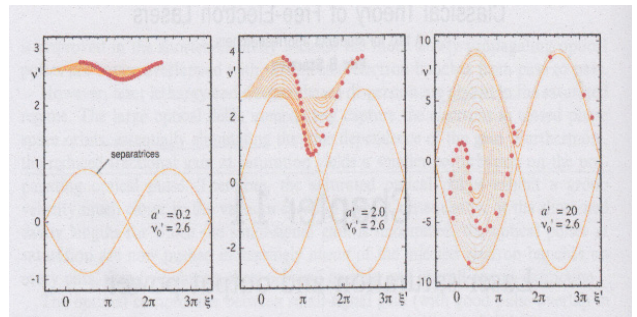


Figure 1: Each figure shows electron distribution in low-gain FEL. (Cited from Ref. [4].)

本節では、少し特殊な近似的な位相空間を考察していく。前章で説明したように、平均値がゼロでない項だけを取り出して議論する。

$$\theta_j(L) = \theta_{j0}(L) + \varepsilon \theta_{j1}(L)$$

$$\eta_j(L) = \eta_{j0}(L) + \varepsilon^2 \eta_{j2}(L)$$

なぜならば、平均値は  $\langle \theta_{j2}(L) \rangle \equiv 0$  であり、 $\langle \eta_{j1}(L) \rangle \equiv 0$  でもあり、ソースにならない項であり、表示しない。ただし、飽和付近では、この仮定は保証されないだろう。後続の論文で精査する予定である。

Figure 2 では、 $(\theta_j(L), \eta_j(L))$  をプロットした。Table 1 の装置で、アンジュレーターにビームを通し、仮定した入力電場に対して、出口での位相空間を表示した。順に入力電場は  $10^7$  V/m、 $10^8$  V/m、 $3 \times 10^8$  V/m、 $6 \times 10^8$  V/ である。電場が弱い内は、上下方向に広がるが、電場が強くなると形に変化が現れる。これが出力飽和になる。

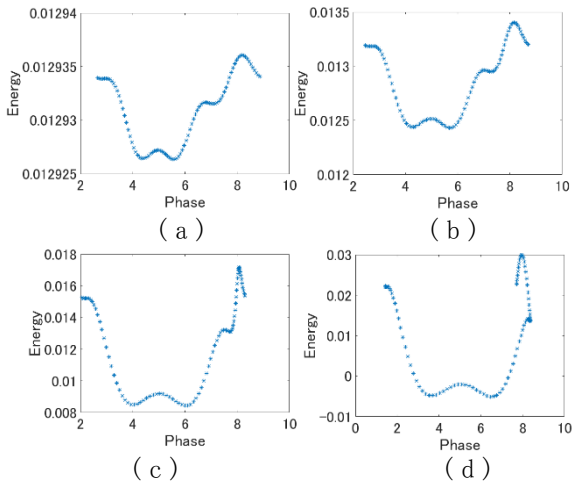


Figure 2: Final electron distribution in phase space at input electric field  $\epsilon=0.063, 0.63, 1.888, 3.777$ .

### 3.2 FELO 動作

まず、初期電力、シードパワーを

$$P_{in} = 6\sqrt{\pi}\rho^2 \frac{P_b}{N_e \sqrt{\log N_e / \rho}}$$

とする。ここで、 $\rho$  はピアス・パラメータであり、 $P_b$  はビーム・パワーで、 $N_e$  は、1波長当たり・単位面積での電子数である。

これは GENESIS コード(文献[5])で用いている仮定であり、ハイゲインでもローゲインでも有効と思われる。

初期電力は、Table 1 を利用して、409.9 (W)である。

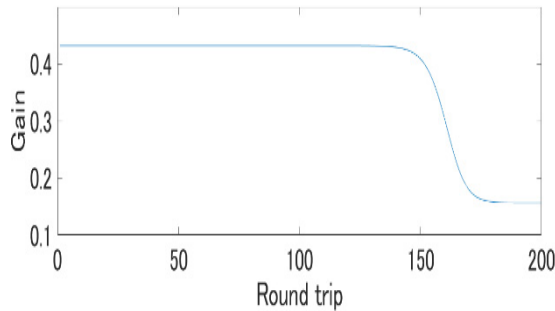


Figure 3: The gain as a function of passes is shown.

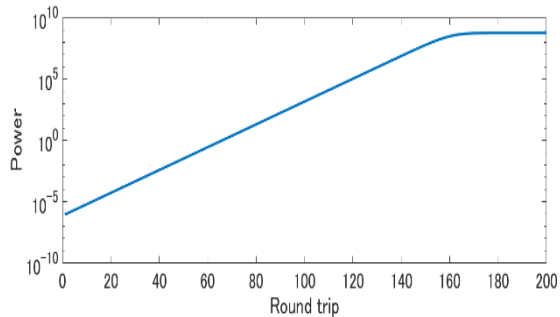


Figure 4: The power evolution as a function of passes is shown.

プログラムは以下の手順で計算していく。まず入力パワーを与え、上記の解析解を利用して、出力を計算する。そのパワーの一部は外部に出る量と空洞共振器のロスとなり、残りは上流に戻り、新たな電子ビームと相互作用をする。多数回の round trip の後に、パワーの発生とロスが平衡し、定常状態になる。

Figure 3 と Fig. 4 では、ビーム半径を  $36 \mu\text{m}$  に、デチューンを 2.3 とした。そこでのゲインは 0.43 で、飽和出力 570 MW を得た。

### 3.3 理論式との比較

個々の問題を、概算の理論式と比較する。

#### (a) 飽和パワー

文献[3]の(7.5)式を利用する。つまり

$$P_{sat} \approx \frac{1}{2N_u(1-R)} P_{beam}$$

である。Rは外部へのパワー流失と光共振空洞のロスの和として、飽和パワーは 714 MW である。

論文では、少し小さい 500 MW ぐらいである。

#### (b) ビーム径

最適ビーム径は以下のように与えられる。

レイリー長とレーザービームの最小径は

$$Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

である。レーザーと電子ビームのマッチングが必要条件であるから、水平方向は、文献[4]の(3.44)式で

$$\frac{\pi w_x^2}{\epsilon_x} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

である。Y 方向も最適設計の場合、文献[4]の(3.43)式により

$$\pi w_y^2 = \frac{\epsilon_y^n}{Kk_U}$$

$\epsilon_x^n = \epsilon_y^n$  を仮定する。X 方向ビーム径は  $1100 \mu\text{m}$  となり、

Y 方向は、 $0.1136 \mu\text{m}$  となる。敢えて、丸ビームとしたら、

$$r = \sqrt{w_x w_y} = 11.2 \mu\text{m}$$

である。この数値は、アンジュレーター中央の値であり、入口と出口で広がっていて、平均値は大きくなる。

電子ビームの断面積は、

$$\Sigma_e = 2\pi w_x w_y$$

で与えられる。

#### (c) デチューン

ローゲイン公式によれば最適なデチューンは 1.3 であるが、これから離れた 2.3 になった。

おそらく、飽和付近の影響であろう。位相空間で回転が始まると同時にパンチングが大きくなり、平均値をゼロとした2項が無視できなくなるのであろう。

#### (d) レーザー光の径の変化

レーザー光は拡がり、同時に位相の変化が起きる。これは Gouy phase factor として考慮する。文献[4]の(9.66)式の考え方で、定義の記号を文献[3]に従い、

$$x'_{opt} = x_{opt} + \frac{L_W}{2Z_R} = 1.3 + \frac{0.45 \times 16}{20 \times 35} = 2.325$$

となる。

3次元効果を、1次元に取り込むテクニックは種々提案されている。

#### 4. Mark3 FEL0

ハワイ大学にある Mark3 FEL0 (Table 2)は、赤外光レーザーである。スタンフォード大学で建設されたが、ハワイ大学に移設された。文献[4]は、製本で、充分な解説がある、

Table 2: Simulation Parameters for Mark3 FEL0

Parameter	Value	Unit
Beam Energy	42	MeV
Normalized emittance	$8\pi$	$\mu$ m-rad
Peak Current	30	A
Undulator Periods	23	mm
Number of Undulator	47	
Laser wavelength	3.323	$\mu$ m

##### 4.1 簡易コードによる計算

赤外光は、回折が大きく、アンジュレーターの中央を  $z=0$  として

$$\exp\left(-\frac{\rho^2}{1+z^2/z_R^2}\right)$$

のように広がる。アンジュレーターの中央の光の面積が入口と出口で、2 倍になる。ビーム断面も変化し、両者の重なり面積が重要であるが、未知のパラメーターとなる。

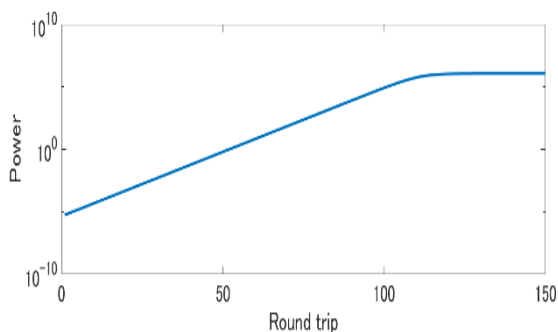


Figure 5: The power evolution as a function of passes.

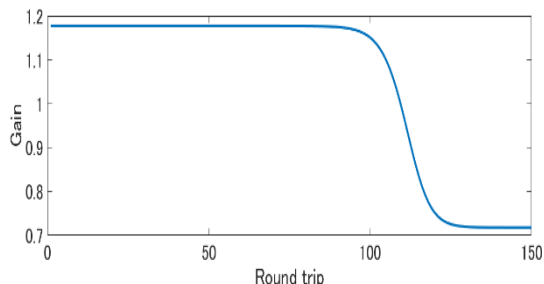


Figure 6: The gain as a function of passes is shown.

ここでは Gain が、テキストが示した 117 % になるように未知のパラメーターを選んだ。

電子ビームはパルスで、時間長が  $4 \mu$ 秒で、光共振器の長さの2倍が 4.094 m であるから、光の往復は 292 回繰り返すことができる。

推定したパラメーターを代入して、簡易コードによる計算した。Figure 5, 6 に示すように、約 110 回で立ち上がり、飽和出力 1.14 MW である。

##### 4.2 文献との比較

文献[4]の11章での計算では、約 140 回の round trip で立ち上がり、パルスの先頭部で 4 MW、パルスの平坦部で 2 MW である (Fig. 7)。スリッページ効果で、先頭部が立ち上がる。本コードでは、その時間依存の効果は含まれない。

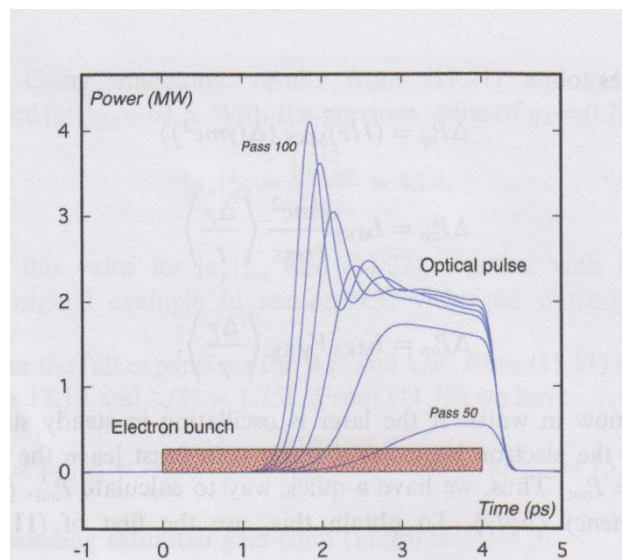


Figure 7: Simulation results by time-dependent code are shown. (Cited from Ref. [4].)

#### 5. XFEL0

##### 5.1 提案されている XFEL0 の概念

SASE による X 線領域の FEL は、横方向に空間コヒーレントはあるが、縦方向にはスパイクの列が並んでいて、

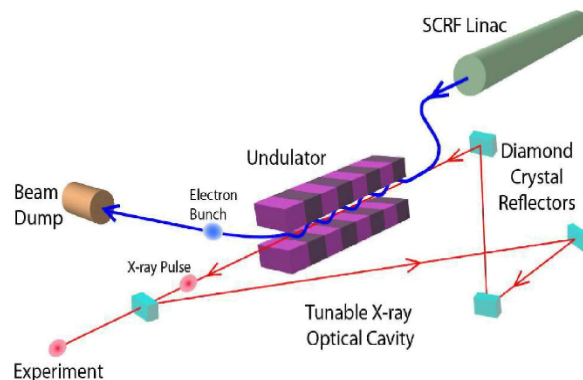


Figure 8: Schematic of an XFEL0 shows its basic operating principle. (Cited from Ref. [6].)

時間コヒーレントはない。空間コヒーレントと時間コヒーレントの両方を持ち、本来のレーザーとなる。

Kwang-Je Kim らによって Energy-Recovery Linac を用いる XFEL が提案された[7] (Fig. 8)。これは、ミラーにデバイ温度が高い結晶(ダイヤモンド、BeO, SiC, サファイヤ)を用いて、そのダーウイン曲線の特性をバンドパスフィルタとして用いて、FEL 出力の周波数拡がりを狭め、多数回の反射により、時間コヒーレンスを得ようという提案である

## 5.2 数値計算

検討する XFEL のパラメーターとして文献[2]を採用する(Table 3)。

Table 3: Simulation Parameters for X-ray FEL

Parameter	Value	Unit
Beam Energy	7	GeV
Energy Spread	1.4	MeV
Normalized emittance	0.2	$\mu$ m-rad
Peak Current	10	A
Electron Bunch Length	1.0	pS
Undulator Periods	17.6	mm
Number of Undulator	3000	
Laser wavelength	0.1	nm
Output Coupling	8	%
Bragg Mirror Reflectivity	85	%

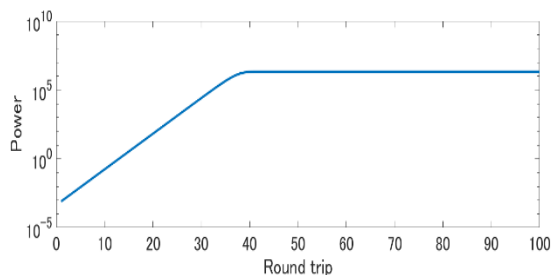


Figure 9: The power evolution as a function of passes is shown.

このパラメーターを簡易コードに代入し、入力 $10^4$  (W)として、計算した。飽和電力は 2 MW である。引用論文では、0.57 MW で飽和する。引用論文にビーム半径の記述はなく  $1 \mu\text{m}$  とした。デチューンは 1.3 である。Figure 9 のように 40 回で飽和するが、引用論文では、約 60 回で飽和している。

## 6. 課題

XFEL の概算的な設計をするために、短時間で動くコードを目指している。その第1歩が、本論文である。

第3章のように回折が大きい場合にどう補正するか。第4章のようなパルスの場合、スリッページ効果をどう取り入れるか。第5章のような SASE で始まる波形をどう処理し、結晶のバンドパスフィルタ効果を取り入れ、時間コヒーレンスを得るか。後続の論文で報告したい。

## 参考文献

- [1] B.W. J. McNeil, G. R. M. Robb, D. Dunning and N. R. Thompson, "FEL: A ONE-DIMENSIONAL TIME-DEPENDENT FEL OSCILLATOR CODE", Proceedings of FEL 2006, Bess, Berlin, Germany, pp. 59-62.
- [2] Kai Li, Minghao Song, and Haixiao Deng, "Simplified model for fast optimization of a free electron laser oscillator" Physical Review Accelerator and Beams20, 2017, 030702.
- [3] Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, "Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers (Principles of Coherent X-ray Generation)", CAMBRIDGE University Press.
- [4] Eric B Szarmes, "Classical Theory of Free-Electron Lasers", AMorgan & Claypool publication (2014).
- [5] S. Reich, GENESIS 1.3 user Manual (Dec-04).
- [6] K. -J. Kim, "Progress Towards X-Ray Free Electron Laser Oscillator", FEL2012-Proceedings, August 26-31, 2012 Nara, Japan.
- [7] Kwang-Je Kim, Yuri Shvyd'ko, and Sven Reiche, "A Proposal for an X-Ray Free-Electron Laser Oscillator with an Energy-Recovery Linac", Phys. Rev. Lett. 100, (2008), 244802.