

# 超伝導加速空洞の表面インピーダンス整合性

## THE CONSISTENCY OF THE SURFACE IMPEDANCE FOR SUPERCONDUCTING ACCELERATING CAVITIES

江木昌史\*

Masato Egi\*

High Energy Accelerator Research Organization

### Abstract

The electromagnetic field of microwave accelerating cavities can be modeled by pillbox cavities. In the case of high-Q value, the electromagnetic field of pillbox cavities corresponds to the surface charge and current in one on one, which is universally acknowledged. But in general, the consistency between the space impedance and the surface impedance is not necessarily acknowledged. Confirming the relationship between the impedances of both is very helpful for understanding the surface charge and current. This article adds some considerations of the behavior of superconducting electrons by the consistency of both impedances as an application.

### 1. 高周波加速空洞と真空のインピーダンス

高周波加速空洞(以下、加速空洞)はピルボックス空洞(以下、ピルボックス)の解析解により電磁場分布を定量的に説明でき、ピルボックスの空間インピーダンスは  $E/H \cong 2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  と真空のインピーダンス  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}(=377\Omega)$  を因子として持つ [1]。実際に使用される空洞についても加速電場  $E_{acc}$  と表面最大磁場  $H_{sp}$  の比  $E_{acc}/H_{sp}$  は TESLA 空洞(超伝導 1.3 GHz)で  $295\Omega$  であり [2]、KEKB DR 空洞(常伝導 506 MHz)が  $105\Omega$  [3] と真空インピーダンスから大きく外れない。

$Q$  値の高い加速空洞のインピーダンスを決定するのはオームの法則ではなく、蓄積エネルギーである。また蓄積エネルギーを決定するのは空洞表面の電荷分布と電流分布である。すると電荷分布と電流分布の比率にも真空のインピーダンスが関係すると考えることができる。空洞表面上の各位置で電荷分布は電束密度  $D$  であり、電流分布は電流密度  $J$  と表皮厚さ  $\delta$  の積  $\delta J$  である。ここで  $E = D/\epsilon_0$  であり、 $H = \delta J$  である。また空洞内の電場  $E$  のある経路積分が電圧  $V = \int E dx$ 、磁場  $H$  のある循環が電流  $I = \oint H dy$  であり、この  $V/I$  を加速空洞の表面インピーダンスとここでは呼ぶことにする。自明とも思えるが、まずは表面インピーダンスの中に真空インピーダンスがどのように関与するかを現象論的に考察してみる。ここで言う現象論的とは現実を模擬したモデルにより、具体的な数値を当て嵌め、そこで導出される数値と式が現実と整合性を持つかを確認する従来の意味である。またピルボックスの両端面を便宜的に極板と呼ぶことにする。

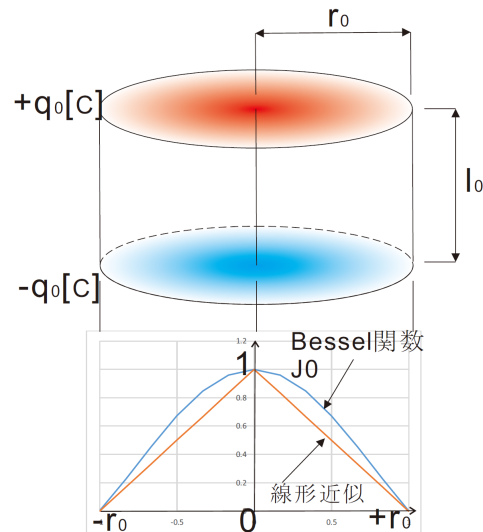


Figure 1: Pillbox cavity.

### 2. 1.3 GHz ピルボックス空洞の現象論

#### 2.1 モデル化と変数

これより共振周波数  $f_0 = 1.3$  GHz の加速空洞をピルボックスにより単純化する (Fig. 1)。円筒の半径を  $r_0$  m、軸方向の長さが  $l_0$  m、極板には  $\pm q_0$  C の電荷が蓄積されると考える。 $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  とすると自由空間の  $f_0 = 1.3$  GHz の電磁波の波長は  $\lambda_0 = c/f_0 = 0.230$  m である。電子が光速に近い速度で加速空洞中を加速電場の半周期で通過するためには  $l_0 = \lambda_0/2 = 0.115$  m の条件が必要となる。また計算を簡単にするために  $r_0 = 0.115$  m も仮定する。ピルボックスの加速モード TM<sub>010</sub> の共振周波数は  $f_0 = 2.405c/2\pi r_0$  Hz であるが [1]、ここに  $r_0 = 0.115$  m を代入すると  $f_0 = 0.9978$  GHz となり、この仮定により共振周波数が 3 割ほどの誤差を持つことに注意する。更に計算を簡単にするために Fig. 1 のとおり、極板上の電荷分布をベッセル関数の線形近似  $J_0(2.405r/r_0) \approx 1 - (r/r_0)$  を用いることにする。

\* masato.egi@kek.jp

## 2.2 極板電荷と電場の関係

以上の条件よりピルボックスの空間インピーダンスと表面インピーダンスを見積もることとする。表皮電流が 0 A の時の両極板の総電荷量  $\pm q_0$  C が最大電荷量である。 $J_0(2.405r/r_0) \approx 1 - (r/r_0)$  を仮定する時、極板中心の表面電束密度  $D_0$  を簡単に求めることができ、

$$q_0 = \int_0^{r_0} D_0 \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) 2\pi r dr = D_0 \frac{\pi r_0^2}{3} \quad [C] \quad (1)$$

従って、

$$D_0 = \frac{3q_0}{\pi r_0^2} \quad [C/m^2] \quad (2)$$

となる。ここで、

$$D_0 \left(1 - (r/r_0)\right) = D(r) \quad (3)$$

と置くと、 $D(r)$  は半径  $r$  の位置における表面電束密度であり、(1) 式の  $D(r)2\pi r dr$  は面積  $2\pi r dr$  上に分布する電荷量を意味する。するとこの電荷がピルボックスの中心位置に作る電場  $dE$  とその中心軸の成分  $dE_c$  は Fig. 2 のとおりとなる。 $dE$  と  $dE_c$  の成す角を  $\phi$  とすると、 $l_0 = r_0$  を仮定しているので、 $\phi = [0, \alpha_0]$  において  $\alpha_0 = \arctan\{r_0/(l_0/2)\} \simeq 63.43^\circ$  となる。Figure 2 は片側の極板のみの寄与が描かれており実際は両極板の寄与があるので、

$$dr = \frac{\sqrt{(l_0/2)^2 + r^2}}{\cos \phi} d\phi$$

の関係に注意して、 $dE_c$  を  $\phi$  で積分すると、

$$\begin{aligned} E_c &= \int_0^{r_0} 2 \cos \phi 2\pi r \frac{D(r)}{4\pi\epsilon_0 \{(l_0/2)^2 + r^2\}} dr \\ &= \frac{D_0}{\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} \sin \phi \left(1 - \frac{1}{2} \tan \phi\right) d\phi \\ &= \frac{D_0}{\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} \left(\sin \phi + \frac{1}{2} \cos \phi - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \phi}\right) d\phi \\ &= \frac{D_0}{\epsilon_0} \times 0.27818 \quad [V/m] \end{aligned} \quad (4)$$

となる。 $E_c$  はピルボックス中心の最大電場であるのに対し加速電場  $E_{acc}$  は実効値であるので、 $E_{acc} = E_c/\sqrt{2}$  であり、また (2) 式も考慮して、

$$q_0 = 0.62309 \times 10^{-12} \times E_{acc} \quad [C] \quad (5)$$

の関係が得られる。

## 2.3 電流と表面磁場の関係

両極板の電荷が調和振動しているのであれば  $q_0$  の時間変化の最大値は以下のように求められる。各々の極板電荷  $\pm q_0$  は半周期毎に符号が反転すること

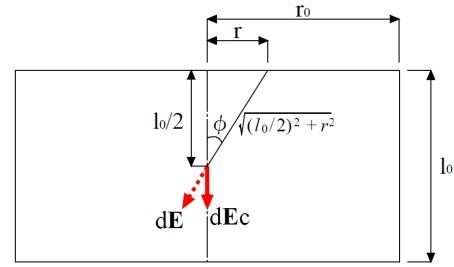


Figure 2: Electric field of pillbox center.

から半周期の間に絶対値で  $2q_0$  の電荷が極板の外周  $2\pi r_0$  を跨ぎ出入りする。すると、 $T$  を  $f_0 = 1.3$  GHz の周期、 $\omega_0$  をその角周波数として、

$$2q_0 = \int_0^{T/2} I_0 \sin \omega_0 t dt = 2 \frac{I_0}{\omega_0} \quad [C]$$

となり、結局、極板電荷  $\pm q_0$  に対しピルボックス側面を流れる電流値は、

$$I_0 = \omega_0 q_0 \quad [A] \quad (6)$$

となる。側面の表面磁場は、

$$H(r) = I_0 / 2\pi r_0 \quad [A/m] \quad (7)$$

である。

最大表面磁場  $H_{sp}$  の計算は積分 (1) 式を利用する。外周と同心円の  $2\pi r$  が囲む電荷  $q(r)$  は (1) 式の積分区間を  $[0, r]$  としたものであり、 $2\pi r$  上の磁場を  $H(r)$  とすると、

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{\omega_0 q(r)}{2\pi r} \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi r} \left\{ \int_0^r D(r) 2\pi r dr \right\} \\ &= \omega_0 D_0 \left( \frac{1}{2} r - \frac{r^2}{3r_0} \right) \quad [A/m] \end{aligned} \quad (8)$$

となる。(8) 式は上に凸の関数であり  $r$  で微分し零と置くことにより、最大表面磁場  $H_{sp}$  の位置  $r = 3r_0/4$  が求まり、

$$H_{sp} = H\left(\frac{3}{4}r_0\right) = \frac{3}{16} \omega_0 D_0 r_0 \quad [A/m] \quad (9)$$

となる。

## 2.4 インピーダンスの整合性

ここまでの説明で  $E_{acc} = E_c/\sqrt{2}$  であり、 $H_{sp}$  は (9) 式で与えられる。すると (2) 式を考慮して、

$$\frac{E_{acc}}{H_{sp}} = \frac{1}{\epsilon_0 \omega_0 r_0} \times 1.0490 \quad [\Omega] \quad (10)$$

である。ところで  $\omega_0 = 2.405c/r_0$  の関係があるので、

$$\frac{E_{acc}}{H_{sp}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times 0.43620 \simeq 164 \quad [\Omega] \quad (11)$$

が得られる。

$E_{acc}$  を中心軸上で積分したものが  $V = l_0 E_{acc}$  であり、 $H_{sp}$  を  $r = 3r_0/4$  の周上で循環を取ると  $I = H_{sp} \times 2\pi(3r_0/4)$  となる。 $l_0 = r_0$  と置いているので、結局、表面インピーダンス  $V/I$  は、

$$\frac{V}{I} = \frac{E_{acc}}{H_{sp}} \times \frac{2}{3\pi} [\Omega] \quad (12)$$

である。従って、ピルボックスの空間インピーダンスと表面インピーダンスの間には整合性がなくてはならない。

### 3. 超伝導電子の挙動

ここまでの話の中で、ある加速電場に対して現れる極板上の電荷  $q_0$  や各位置における電流  $I(r) = \omega_0 q(r)$  を求めて来た。具体的な加速電場を与えれば極板電荷量や各位置における電流値を求めることができる。もしもここで表皮厚さ  $\delta$  に具体的な数値を与えることが出来るならば、表皮内の伝導電子数を求めることができ、従ってこれらの電子の振る舞いも予測することができる。

加速空洞の常伝導電子の振る舞いはドルーデモデルや表皮効果などが定量的な説明を与える。一方で超伝導電子についてはコヒーレンス長や臨界磁場の影響で未知の部分も多く残されている。以下では 1.3 GHz ニオブ製ピルボックス空洞を取り上げ、前節で求めた具体的な数値を代入することにより特に超伝導加速空洞の問題となるジュール熱発生について検証してみる。

#### 3.1 ニオブ製ピルボックス空洞の極板電荷

1.3 GHz ニオブ製ピルボックス空洞を仮定する。300 K ほどの室温では常伝導であり、9.25 K より低い温度では超伝導状態である。臨界温度 9.25 K のニオブの場合 2 K を維持することが出来るならばこれらの伝導電子がほぼ全て超伝導状態に遷移していると考えられる。

ピルボックスの極板上の電荷分布は Fig. 1 で示したとおりベッセル関数を線形近似していた。中心の電荷密度は最も大きく、例えば  $E_{acc} = 50 \times 10^6$  V/m の高電界の時も極板上でそれに応じた電荷密度を作り出すことが出来るかを考えてみたい。そのためには先ずニオブの単位体積当たりの伝導電子数密度  $n_e$  を求めることから始める。ニオブの特性値を Table. 1 に示す。伝導電子は  $5s^1$  だけとすると、伝導電子数密度は単位体積中の原子数と同じであり、

$$n_e = 5.55 \times 10^{28} \text{ [electrons/m}^3\text{]}$$

である。超伝導電子はコヒーレンス長  $\xi_0$  の定在波と考えることもでき(秩序変数)、極板上の表面単位面積  $\xi_0^2$ 、または単位体積  $\xi_0^3$  中の伝導電子数を見積ることは無意味とは考えない。すると  $\xi_0^3$  中の超伝導電子数は、

$$n_e \xi_0^3 = 3.55 \times 10^6 \text{ [electrons]} \quad (13)$$

Table 1: Nb Characteristic Value

Atomic weight	92.906
Density	$8.57 \times 10^3$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Valence electron	$4d^4, 5s^1$
Electrical conductivity	$6.2 \times 10^6$ [S/m]
Specific heat	$0.2699 \times 10^3$ [J/kg K]

となる。ただし、 $\xi_0 = 40 \times 10^{-9}$  m と置いている。極板表面で最も大きな電束密度は極板中心であり、 $\xi_0^2$  当たりの電子数は、(2) 式と (5) 式を用いて、 $e_0$  を電荷素量とすると、

$$\frac{D_0 \xi_0^2}{e_0} = 4.49 \times 10^{-7} \times E_{acc} \text{ [electrons]} \quad (14)$$

となる。ここで  $E_{acc} = 50 \times 10^6$  V/m というかなり高い電界を代入してみると、 $\xi_0^2$  当たり 22.5 個の電子がいるということになる。秩序変数を考えると表面に  $\xi_0^2$  を持つ単位体積  $\xi_0^3$  には  $3.55 \times 10^6$  個の十分な超伝導電子が存在し、共振周波数の半周期で極板中心の  $\xi_0^3$  に入出入りする電子数は  $(22.5 \times 2)$  個ということになる。これまでの議論からすると、ある閉曲線で囲まれた領域に現れる電荷量に角周波数を掛けたものがその領域に入出入りする電流量なので、

$$22.5 \times e_0 \omega_0 = 2.94 \times 10^{-8} \simeq 0 \text{ [A]}$$

となり、従来の考え方と矛盾しない。従って、 $E_{acc} = 50 \times 10^6$  V/m の高電界であっても Fig. 1 に示す極板上の電荷分布は容易に構成できると考えられる。ここでは常伝導と超伝導は表皮厚さ以外に区別はない。

#### 3.2 電流速度と移動距離

第 2 節によると極板電荷が決まればピルボックス側面に流れる電流も決まるが、極板電荷  $q_0$  が  $\pi r_0^2$  の面積に分布しているのに対し、電流は断面積  $2\pi r_0 \xi_0$  の表皮を通ることになる。二つの面積の比は、

$$\frac{2\pi r_0 \xi_0}{\pi r_0^2} = 6.95 \times 10^{-7} \quad (15)$$

となり、表皮断面積は極板の面積とは比較にならないくらい狭い。これは極板上の電荷分布を構成するのに十分な伝導電子が存在していたのに対し、電流に供給できる電子数は極端に少ないことを示している。(6) 式より電流値は、

$$I_0 = \omega_0 q_0 = n_e e_0 2\pi r_0 \delta v_0 \text{ [A]} \quad (16)$$

となる。ここで  $\delta$  は表皮厚さ、 $v_0$  は伝導電子がある加速電界で取り得る最大速度(以下、電流速度)である。未知数が  $\delta$  と  $v_0$  とすると、(16) 式と (5) 式より、

$$\delta v_0 = 0.792 \times 10^{-12} \times E_{acc} \text{ [m} \frac{\text{m}}{\text{s}}\text{]} \quad (17)$$

という関係が得られる。常伝導の時は、

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega_0 \sigma}} = 5.6 \times 10^{-6} \text{ [m]}$$

である。超伝導では、

$$\delta = \xi_0 = 40 \times 10^{-9} \text{ [m]}$$

であった。表皮厚さと電流速度が反比例することも従来の考え方と矛盾しない。 $\delta = 40 \times 10^{-9} \text{ m}$ を(17)式に代入すると、

$$v_0 = 0.198 \times 10^{-4} \times E_{acc} \text{ [m/s]} \quad (18)$$

となり、先ほどの  $E_{acc} = 50 \times 10^6 \text{ V/m}$  を代入すると  $v_0 = 990 \text{ m/s}$  となる。

ピルボックス側面を流れる電流は調和振動をしており、共振周波数  $\omega_0$  と電流速度  $v_0$  から超伝導電子の振幅  $a_0$  は、

$$a_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = 2.42 \times 10^{-15} \times E_{acc} \text{ [m]} \quad (19)$$

となる。ここで  $E_{acc} = 50 \times 10^6 \text{ V/m}$  を代入すると  $a_0 = 121 \times 10^{-9} \text{ m}$  となる。

### 3.3 臨界磁場と渦糸と移動距離の関係

第二種超伝導体のニオブは下部臨界磁場  $H_{c1}$  を超える磁場影響下ではニオブの表面に磁束量子  $\phi_0 = h/2e_0$  (以下、渦糸) の侵入が始まり、渦糸中の常伝導相と他の部分の超伝導相の二相状態に転移する。ただし、 $h$  はプランク定数である。

ニオブの  $H_{c1}$  の実測値は  $1.43 \times 10^5 \text{ A/m}$  であり [4]、先程求めて来た空間インピーダンス  $E_{acc}/H_{sp} = 164 \Omega$  に  $H_{c1}$  を乗じると、 $E_{acc} = 23.4 \times 10^6 \text{ V/m}$  となる。ピルボックスの場合はこの加速電界から渦糸の侵入が始まると考えられる。また、ここでの空間インピーダンス  $E_{acc}/H_{sp}$  の定義によりこの渦糸は  $r = 3r_0/4$  付近に侵入し始める可能性を示している。同様に TESLA 空洞の場合は導入部で示した空間インピーダンス  $295 \Omega$  を利用して、 $H_{c1}$  に対応する加速電場は  $E_{acc} = 42.1 \times 10^6 \text{ V/m}$  である。

さて、(19) 式によると加速電界  $E_{acc} = 1 \times 10^6 \text{ V/m}$  の時の超伝導電子の振幅は  $a_0 = 2.42 \times 10^{-9} \text{ m}$  となり、コヒーレンス長の約  $1/16$  となる。この時は振幅  $a_0$  がコヒーレンス長を跨いで動くことはないが、 $E_{acc} = 10 \times 10^6 \text{ V/m}$  の時は  $a_0 = 24.2 \times 10^{-9} \text{ m}$  とコヒーレンス長の約半分、更に  $E_{acc} = 50 \times 10^6 \text{ V/m}$  の時は  $a_0 = 121 \times 10^{-9} \text{ m}$  と十分にコヒーレンス長を超える距離に到達する。TESLA 空洞に置き換えた場合は渦糸の侵入開始電界が  $42.1 \times 10^6 \text{ V/m}$  であるだけで各加速電界に対する超伝導電子の振幅  $a_0$  はピルボックスの場合とおおよそ一致すると考えられる。

渦糸の空間的な広がりにはコヒーレンス長と考えられている。また渦糸の部分は常伝導相である。コヒーレンス長より短い距離で超伝導電子が振動すれば渦糸への干渉は少ないと考えられるが、加速電界

が  $50 \times 10^6 \text{ V/m}$  に達し超伝導電子の振幅がコヒーレンス長を大きく上回ると渦糸への干渉も少なくはないと考えられる。渦糸に超伝導電流が作用し、渦糸の内部の常伝導電子が動き始めると散乱過程により発熱が生じる。

### 3.4 参考 ローレンツ力と発熱量

渦糸に超伝導電流が交差するという描像でローレンツ力と発熱量を算出してみる。

渦糸と超伝導電子は直接、力を及ぼし合うかどうかは定かではない。超伝導電子は磁場を嫌い、磁場を遮蔽するための電流 (マイスナー電流) を流そうとする。渦糸の周囲にもマイスナー電流の循環があると考えられ、超伝導電子の運動 (超伝導電流) が直接、渦糸に力を及ぼすとは考え難いのである。増して、渦糸と超伝導電流が交差することも考えづらい。

本来ならばマイスナー電流と超伝導電流の間の力のやり取りを見積もるべきである。渦糸は磁束であり、磁束の周囲には必ずベクトルポテンシャル  $A$  が存在する。マイスナー電流を  $J_M$  とするとロンドン方程式は、

$$J_M + \frac{n_e e_0^2}{m_e} A = 0$$

とベクトルポテンシャル  $A$  と等価な  $J_M$  が存在すると主張している。このマイスナー電流  $J_M$  のトラスが空間的にどのように広がっているかを評価するのは容易ではないのである。従って渦糸と超伝導電流が直接交差すると単純に考え、ローレンツ力と発熱量を求めることにした。

まずローレンツ力を試算する。磁束量子  $\phi_0$  は定数であり、渦糸は平面的にコヒーレンス長の広がりを持つので断面積は先程の  $\xi_0^2$  で評価する。するとローレンツ力は磁束密度と速度の積なので、

$$E_L = \frac{\phi_0}{\xi_0^2} \times v_0 = 2.56 \times 10^{-5} \times E_{acc} \text{ [V/m]} \quad (20)$$

となる。ここで  $v_0$  は (18) 式で与えられるものであり、超伝導電子の振幅  $a_0$  にも対応する。また、オームの法則  $V = RI$  により発生するジュール熱  $W$  を以下のように書き替える。すなわち、

$$W = VI = \frac{V^2}{R} = (SL)\sigma E^2$$

である。ここで  $S$  は抵抗体の断面積であり、 $L$  は抵抗体の長さであり、 $SL$  は抵抗体の体積を表す。従って  $\sigma E^2$  は単位体積当たりの発熱量を表す。ローレンツ力は (20) 式であり、交番電場であるので、実効値  $E_L/\sqrt{2}$  を使うと、

$$\frac{1}{2}\sigma E_L^2 = 4.06 \times 10^{-5} \times E_{acc}^2 \text{ [W/m}^3\text{]} \quad (21)$$

が得られるが、これは考えづらい結果である。Table. 1 によるとニオブの単位体積を 1 K 上昇させるエネルギー

ギーは密度と比熱の積なので、

$$8.57 \times 10^3 \times 0.2699 \times 10^3 = 2.31 \times 10^6 \text{ [J/m}^3\text{K]}$$

となるが、 $E_{acc} = 10 \times 10^6 \text{ V/m}$  の時には、1 秒当たりで 1750 K の温度上昇を起こす発熱があるということになる。Table. 1 は標準状態の値であるのに対し、比熱は低温になるほど小さくなり、同じエネルギーを与えても温度上昇は大きくなり、低温になるほど条件は厳しい。 $E_{acc} = 20 \times 10^6 \text{ V/m}$  の場合は更にその 4 倍ということになる。これは不合理である。従って、超伝導状態で渦糸と超伝導電流は交差しない、または、渦糸と超伝導電流が交差すると超伝導状態は壊れると考えられる。渦糸と超伝導電流が交差するという仮定が良くなかった。

#### 4. 結論

空洞のインピーダンスと伝導電子密度から表皮電流の電流速度と振幅を計算することが出来る。ニオブの超伝導状態では下部臨界磁場から渦糸が侵入し、電流の振幅がコヒーレンス長よりも大きくなると渦糸と超伝導電流との間の干渉も強いと考えられる。

今回は発熱過程の一つの可能性を示したに過ぎず、実際にはこれとは異なるいくつかの発熱過程が確認されている。

#### 謝辞

超伝導加速空洞の技術全般と実験データを含めた周辺情勢について KEK 応用超伝導加速器センター SRF グループから多くのことを学ばせて頂いており、ここに深く感謝する。

#### 参考文献

- [1] 高田耕治 OHO'97, "高周波加速".
- [2] B. Aune *et al.*, "Superconducting TESLA cavities", Phys. Rev. ST Accel. Beams 3, 092001 – Published 22 September 2000.
- [3] T. Abe *et al.*, "Direct observation of breakdown trigger seeds in a normal-conducting rf accelerating cavity", Phys. Rev. Accel. Beams 21, 122002 – Published 26 December 2018.
- [4] K. Saito, "Critical field limitation of the niobium superconducting RF cavity", SRF2001, Tsukuba, Japan.